1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$S_1\colon \sum \frac{z^n}{\sqrt{n}};\qquad S_2\colon \sum \frac{n!}{(2n)!}z^n;\qquad S_3\colon \sum (\ln n)z^n;\qquad S_4\colon \sum n^3 n! z^n$$
$$S_5\colon \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n;\qquad S_6\colon \sum \frac{\ln n}{\ln(n+1)}z^n;\qquad S_7\colon \sum (1+i)^n z^n;\qquad S_8\colon \sum \frac{(-2)^n}{n+1}z^{3n+1};$$
$$S_9\colon \sum \frac{n^2+1}{3^n}z^n;\qquad S_{10}\colon \sum \frac{\ln n}{n^2}z^n;\qquad S_{11}\colon \sum \frac{\ln n}{n^2}z^{2n}.$$

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel $\ell \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

3. Déterminer le rayon de convergence, puis exprimer à l'aide des fonctions usuelles la somme des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n-1}{n}x^n;\qquad \sum \frac{n+2}{n+1}x^n;\qquad \sum \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n;\qquad \sum \frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n}.$$

4. Montrer la convergence et déterminer la somme des séries numériques suivantes :

$$\sum \frac{1}{2^n n!};\qquad \sum \frac{n}{2^n};\qquad \sum \frac{n^2}{2^n};\qquad \sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)}.$$

5. Développer en série entière les fonctions suivantes (préciser le rayon de convergence) :

$$f_1\colon x \mapsto \ln(1+2x^2);\quad f_2\colon x\mapsto \frac{1}{a-x}\ (a\neq 0);\qquad f_3\colon x\mapsto \frac{e^x}{1-x};$$
$$f_4\colon x\mapsto \arctan(x+1);\qquad f_5\colon x\mapsto (4+x^2)^{-3/2}.$$

6. Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\colon xy''+2y'-xy=0\qquad (E_2)\colon x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0;$$
$$(E_3)\colon \begin{cases} y''+xy'+y=1 \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases};\qquad (E_4)\colon x(x-1)y''+3xy'+y=0.$$

7. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$f_1\colon x\mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ 1 \text{ sinon}; \end{cases}\qquad f_2\colon x\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} \text{ si } 0<|x|<\pi \\ 0 \text{ si } x=0. \end{cases}$$