1. On considère deux événements A, B et deux variables aléatoires X, Y. Déterminer, parmi les écritures suivantes, lesquels sont fautives et lesquels sont correctes.

(1) $A+B$;
(2) $A \cup B$;
(3) $X+Y$;
(4) $X \cap Y$;
(5) $\mathbf{P}(1-A)$;
(6) $1-\mathbf{P}(A)$;
(7) $\mathbf{P}(A)+5$;
(8) $\mathbf{P}(A)$;
(9) $\mathbf{P}(X)$;
(10) $\mathbf{P}(X \cup Y)$;
(11) $\mathbf{P}(X+Y)$;
(12) $\mathbf{P}(X)+\mathbf{P}(Y)$;
(13) $\mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B)$;
(14) $\mathbf{P}(A \cup B)$;
(15) $\mathbf{P}(X=0)$;
(16) $\mathbf{P}(A=0)$;
(17) $\mathbf{P}(X+Y=5)$.

2. Soient A et B deux événements. Compléter les énoncés suivants :
(1) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) \ldots \mathbf{P}(B) \iff A$ et B sont …
(2) $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \ldots \mathbf{P}(B) \iff A$ et B sont …

3. Soient A et B deux événements. On suppose A et B indépendants. Montrer que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

4. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Une urne contient n boules rouges numérotées de 1 à n. Une deuxième urne contient n boules vertes numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans chaque urne. On appelle X la somme des valeurs obtenues.
(1) Montrer que, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $\mathbf{P}(X=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
(2) Calculer $\mathbf{P}(X \leq N)$.
(3) Calculer la loi de X.
(4) Calculer $\mathbf{E}(X)$.
(5) On rassemble les deux urnes en une seule, et on tire deux boules simultanément au hasard dans cette urne. Soit Y la somme des valeurs obtenues. Calculer la loi de Y.

5. J'ai perdu mes clés. Je suis sûr à 90% de les aovir laissées dans mon sac, où elles peuvent avoir atterri de manière équiprobable dans chacune des huit poches. Je viens de fouiller en vain les sept premières poches, quelle est la probabilité pour que mes clés se trouvent dans la huitième ?

6. Une compagnie d'assurances couvre une flotte de mille bateaux. On estime la valeur de chaque bateau à dix millions d'euros, et la probabilité de perte d'un bateau à 0,001 par an. Les pertes de bateaux sont supposées mutuellement indépendantes.
(1) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de bateaux perdus en une année. Quelle est la loi de probabilité de X ?
(2) Quelle est la probabilité approximative qu'au moins trois bateaux soient perdus en une année ?
(3) La compagnie d'assurance indemnise chaque année les propriétaires de tous les bateaux perdus au cours de l'année. Quel capital doit-elle garder en réserve pour pouvoir dédommager tous les propriétaires avec une probabilité de 0,999 ?

7. Dans une usine, trois machines A, B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées. Le pourcentage de pièces défectueuses pour chaque machine est respectivement 3%, 4% et 5%.
(1) Quelle est la probabilité qu'une pièce tirée au hasard soit défectueuse ?
(2) On tire au hasard une pièce et on constate qu'elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine A ?

8. Soient X et Y deux variables aléatoires finies. La loi du couple $Z = (X, Y)$ est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1	2	6
1	0	2/9	1/9	1/9
2	1/27	1/9	1/27	1/9
3	0	0	1/9	4/27

(1) Déterminer les lois marginales du couple.

(2) Donner l'espérance et la variance de X et de Y.

(3) X et Y sont-elles indépendantes ?

(4) Calculer le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$.

(5) Quelle est la probabilité que le produit XY soit impair ?

9. On lance un dé à six faces non pipé jusqu'à obtenir un six. On note T le nombre de lancers.

(1) Quelle est la loi de T ? Quelle est son espérance ?

(2) Calculer la fonction de répartition de T et en déduire $\mathbf{P}(2 < T < 8)$.

(3) Calculer $\mathbf{P}(T > 3)$ et $\mathbf{P}(T > 6 \mid T > 3)$.

(4) Quel est le nombre minimal de lancers à effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{1}{2}$?

10. Le nombre de saumons qui remontent une rivière est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque saumon a une chance sur 4 de se faire manger par un ours pendant son voyage, indépendemment des autres saumons et du nombre de saumons. On note Y le nombre de saumons qui sont mangés par un ours.

(1) Soient $k, n \in \mathbf{N}$. Que vaut $\mathbf{P}(Y = k \mid X = n)$?

(2) En déduire la loi de Y.

11. Une grenouille monte les marches d'un escalier en partant du sol (marche numéro 0), et en faisant des sauts successifs. Ces sauts sont de hauteur variable :

- une marche, avec probabilité $p \in \,]0; 1[$;
- deux marches, avec probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

(1) Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille. On note X_n le nombre de fois où la grenouille a fait un saut d'une marche et Y_n le nombre de marches franchies.

  (a) Quelle est la loi de X_n ?

  (b) Exprimer Y_n en fonction de X_n.

  (c) En déduire l'espérance et la variance de Y_n.

(2) Pour $k \geq 1$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche numéro k.

  (a) Déterminer p_1 et p_2.

  (b) Établir une formule de récurrence liant p_k et p_{k-1}.

  (c) Donner la valeur de p_k pour tout $k \geq 1$.

(3) On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ème marche. Écrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire Z_n. On rappelle que la fonction `random()` de la bibliothèqe `random` renvoie un réel dans l'intervalle $[0; 1[$.