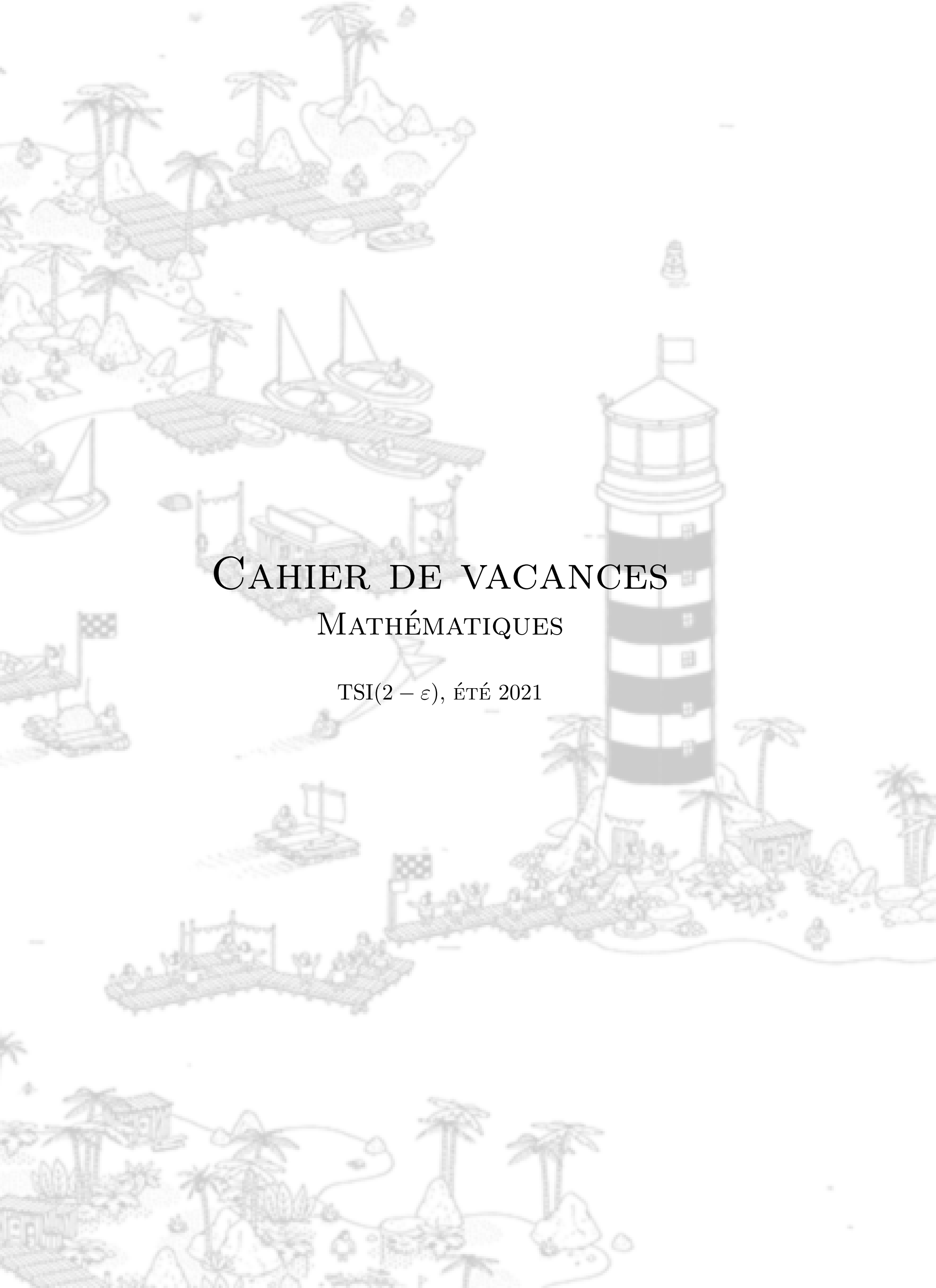


Cahier de vacances

Mathématiques

TSI$(2-\varepsilon)$, été 2021

Avant-propos

Ce cahier a pour objectif de vous permettre de reprendre les maths en douceur pour les dernières semaines de vacances. Il n'est pas obligatoire, mais les notions abordées dans les exercices (qui ont toutes été vues en classe cette année) ainsi que les formules de la page 7 seront supposées connues de toutes et tous au moment de la rentrée.

Des indications pour la résolution de chaque exercice sont présentes en page 6.

Bonne fin de vacances !

E. B.

1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}.$$

(1) Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f.

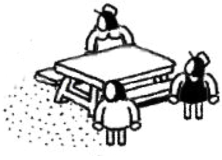
(2) Vérifier que la dérivée de f est nulle. Qu'en déduit-on concernant la fonction f ?

(3) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$. Est-ce compatible avec le résultat de la question (2) ? Si ce n'est pas le cas, où est l'erreur ?

2

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+x)^{1/x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x\tan(x/2)}.$$



Illustrations : Sylvain Tegroeg pour le jeu Hidden Folks.

3

Linéariser l'expression $\cos^3 t$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \,\mathrm{d}t$$

4

Soient $b, r, n \in \mathbf{N}^\star$. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On tire successivement n boules dans l'urne, avec remise.

(1) Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

(2) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Quelle est la probabilité de tirer exactement k boules bleues ?

5

Résoudre sur $]-1; 1[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1.$$

6

Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{a}{t - 1} + \frac{b}{t + 1}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1}$.

7

Donner la forme algébrique du nombre complexe $z = (2 + 2i)^7$.

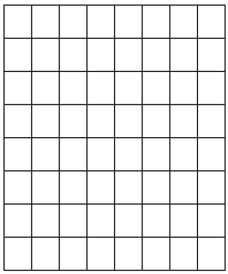
8

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que M est la matrice d'un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques (c'est-à-dire les sous-espaces *sur lequel* et *parallèlement auquel* on projette).

Combien y a-t-il de rectangles dans la figure ci-dessous ?



9

On dispose d'une pièce de monnaie truquée (deux côtés Pile), ainsi que d'une pièce ordinaire. On choisit sans regarder l'une de ces deux pièces et on la lance n fois ; on n'obtient que des Pile. À partir de quelle valeur de n peut-on être sûr·e à 99% qu'on a choisi la pièce truquée ? (d'après R. Mansuy)

10

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbf{K}_n[X]$.

(1) Rappeler la dimension de E.

(2) On considère une famille $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ d'éléments de E échelonnés en degré – c'est-à-dire tels que, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\deg P_k = k$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

On s'intéresse maintenant à l'endomorphisme

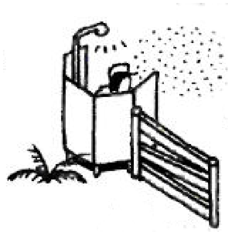
$$u \colon P \mapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'.$$

(3) Vérifier que u est bien défini.

(4) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de E.

(5) Déterminer le noyau de u.

(6) Déterminer le rang de u (essayer de répondre à cette question de plusieurs manières différentes – on peut en trouver au moins quatre).



11

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k}.$$

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\ln(1 + x) \leq x$.

(2) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n + 1) \leq u_n$.

(3) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

(4) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 1 + \ln(n)$.

(5) Déduire des questions précédentes un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$.

Indications

1. Dans le théorème « $f' = 0 \implies f$ constante », quelle propriété doit vérifier le domaine de définition de f ?

2. Pour la première, utiliser la définition de la fonction puissance a^b puis faire un développement limité. Pour la deuxième, utiliser des développements limités pour trouver des équivalents du numérateur et du dénominateur.

3. Écrire $\cos t$ à l'aide de la formule d'Euler, puis l'élever au cube à l'aide du binôme de Newton.

4. Les tirages sont-ils indépendants les uns des autres ? Dénombrer toutes les façons différentes de tirer k boules.

5. Résoudre l'équation homogène, puis utiliser la méthode de variation de la constante.

6. Réduire au même dénominateur, puis identifier les coefficients.

7. Écrire $2 + 2i$ sous forme trigonométrique.

8. Vérifier que $M^2 = M$, puis calculer $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Ker}(M - I_3)$.

9. Utiliser la formule de Bayes.

10. (2) Écrire une combinaison linéaire nulle des P_i. Que dire du coefficient dominant ?

(3) Vérifier que si $\deg P \leq n$, alors $\deg u(P) \leq n$.

(6) Théorème du rang, nombre de pivots, dimension de l'espace engendré par les lignes de la matrice, par ses colonnes, etc.

11. (1) Étudier les variations de $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$ et en déduire son signe.

(2) Appliquer la question précédente à $x = \frac{1}{k}$, puis sommer pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. Reconnaître une somme télescopique.

(3) Exprimer $\frac{1}{k}$ comme l'intégrale d'une fonction constante.

(4) Appliquer la question précédente à la définition de u_n (attention au cas $k = 1$).

(5) Utiliser le théorème d'encadrement pour déterminer la limite du quotient $\frac{u_n}{\ln n}$.

Questions, remarques, demandes d'aide ou de correction, etc.

$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$

`e.besson@free.fr`

Formulaire

Voir les réponses et se tester sur `sophieand.me`.

Formules trigonométriques. Connaître par cœur ou savoir retrouver rapidement ($t < 30$ s, sans erreur de signe ou autre) :

valeurs des fonctions cos, sin et tan en 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos(-\theta);\quad \sin(-\theta);\quad \tan(-\theta);\quad \cos(\theta+2\pi);\quad \sin(\theta+2\pi);\quad \tan(\theta+\pi);$$
$$\cos(\pi\pm\theta);\quad (\sin\pi\pm\theta);\quad \cos(\tfrac{\pi}{2}\pm\theta);\quad \sin(\tfrac{\pi}{2}\pm\theta);$$

$$\cos(a\pm b);\quad \sin(a\pm b);\quad \tan(a\pm b);$$
$$\cos(2a)\ \text{(3 formules)};\quad \sin(2a);\quad \tan(2a);$$
$$\cos^2\theta+\sin^2\theta;\quad \text{linéarisation de } \cos^2\theta \text{ et de } \sin^2\theta;$$

Dérivées. Connaître les domaines de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

$$x\mapsto x^\alpha\ (\text{distinguer } \alpha\in\mathbf{N},\ \alpha\in\mathbf{Z},\ \alpha\in\mathbf{R});\quad x\mapsto\sqrt{x};\quad x\mapsto e^x;$$
$$x\mapsto a^x\ (a>0);\quad x\mapsto\ln x;\quad x\mapsto\cos x;\quad x\mapsto\sin x;$$
$$x\mapsto\tan x\ \text{(2 formes)};\quad x\mapsto\arccos x;\quad x\mapsto\arcsin x;\quad x\mapsto\arctan x.$$

Connaître les formules de dérivation suivantes :

$$(u+v)';\quad (\lambda\cdot u)';\quad (u\times v)';\quad \left(\frac{1}{u}\right)';\quad \left(\frac{u}{v}\right)';\quad (v\circ u)';$$
$$(u^n)';\quad (\sqrt{u})';\quad (\exp u)';\quad (\ln u)';\quad (\cos u)';\quad (\sin u)';\quad (\tan u)';$$
$$(\arcsin u)';\quad (\arccos u)';\quad (\arctan u)'.$$

Primitives. Connaître par cœur ou savoir retrouver rapidement, sur chaque intervalle du domaine de définition, une primitive des fonctions suivantes :

$$x\mapsto x^\alpha\ (\alpha\neq-1);\quad x\mapsto\frac{1}{x};\quad x\mapsto e^{ax};\quad x\mapsto\cos(ax);\quad x\mapsto\sin(ax);$$
$$x\mapsto\ln(x);\quad x\mapsto\frac{1}{x^2+a^2};\quad x\mapsto\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Développements limités. Savoir donner à tout ordre le développement limité des expressions suivantes (x étant au voisinage de 0) :

$$e^x;\quad \cos x;\quad \sin x;\quad \ln(1+x);\quad \arctan x;\quad \frac{1}{1-x};\quad \frac{1}{1+x};$$
$$(1+x)^\alpha;\quad \tan x\ \text{(à l'ordre 3 uniquement)}.$$