1

(1) La fonction arctangente est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier. En revanche, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}^\star$. On en déduit, par théorème de composition, que f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}^\star$.

(2) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, d'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \arctan'(x) - \frac{1}{x^2}\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+(1/x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dérivée de f est donc bien constamment nulle. Piège : on en déduit que f est constante ?

(3) $f(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$; $f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$. On a $f(1) \neq f(-1)$, cela contredit le fait que f soit constante !

L'erreur : le théorème « $f' = 0$ donc f constante » n'est valable que sur un intervalle, ce que $\mathbf{R}^\star$ n'est pas.

Correction : f est constante sur chaque intervalle de son domaine de définition ; autrement dit, elle est constante sur $\mathbf{R}^\star_-$, égale à $-\frac{\pi}{2}$, et sur $\mathbf{R}^\star_+$, égale à $\frac{\pi}{2}$.

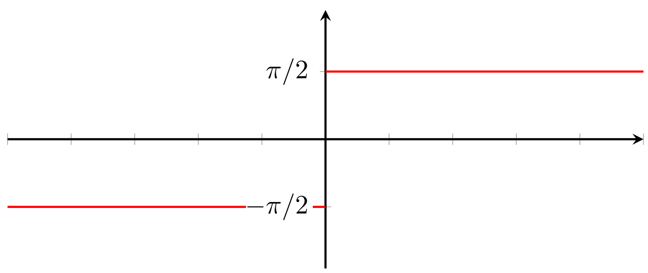

Figure 1. Représentation graphique de f

2

Comme toujours lorsqu'on manipule une expression où apparaît un exposant variable, on revient à la définition de a^b : pour tout $x > 0$, $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$. On utilise alors le développement limité du logarithme :

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\tfrac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \exp\left(\tfrac{1}{x}(x+o(x))\right) = \exp(1+o(1)) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp(1) = e$$

Pour la deuxième limite, on recherche des équivalents du numérateur et du dénominateur. Pour le dénominateur, on a clairement $x\tan(x/2) \sim x \cdot x/2 \sim x^2/2$. Pour le numérateur,

$$\cos(2x) - \cos(x) = 1 - \tfrac{(2x)^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{3x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{3x^2}{2}.$$

On a donc

$$\frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x\tan(x/2)} \sim \frac{-3x^2/2}{x^2/2} \sim -3 \xrightarrow[x\to 0]{} -3$$

3

On va utiliser la formule d'Euler, puis le binôme de Newton. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left[\binom{3}{0}e^{0it}e^{-3it} + \binom{3}{1}e^{it}e^{-2it} + \binom{3}{2}e^{2it}e^{-it} + \binom{3}{3}e^{3it}e^{-0it}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{-3it} + 3e^{-it} + 3e^{it} + e^{3it}\right) = \frac{1}{8}\Big(\underbrace{e^{3it}+e^{-3it}}_{=2\cos(3t)} + 3(\underbrace{e^{it}+e^{-it}}_{=2\cos t})\Big) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos(3t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(3t)}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{-1-0}{3} + \frac{3}{4}(1-0) \\
&= -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

4

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, notons R_i (resp. B_i) l'événement « obtenir une boule rouge (resp. bleue) au i-ème tirage ». Comme la boule tirée est remise dans l'urne à chaque fois, on a, pour tout i, $\mathbf{P}(B_i) = \frac{b}{b+r}$ et $\mathbf{P}(R_i) = \frac{r}{b+r}$.

(1) On cherche $\mathbf{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n)$. Les tirages étant mutuellement indépendants, on a

$$\mathbf{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) = \mathbf{P}(R_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(R_n) = \left(\frac{r}{b+r}\right)^n.$$

(2) Commençons par une situation plus restrictive et calculons la probabilité que les k premières boules tirées soient bleues, et les $n-k$ suivantes rouges. Il s'agit (comme il y a indépendance) de

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_n) &= \mathbf{P}(B_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(B_k) \times \mathbf{P}(R_{k+1} \times \cdots \times \mathbf{P}(R_n) \\
&= \left(\frac{b}{b+r}\right)^k \left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k} = \frac{b^k r^{n-k}}{(b+r)^n}.
\end{aligned}$$

Maintenant, tirer « d'abord tout bleu, puis tout rouge » n'est pas l'unique façon d'obtenir k boules bleues. On peut par exemple commencer par toutes les rouges et finir par toutes les bleues, ou encore alterner, etc. Il existe autant de façons différentes de procéder que de choix de k tirages destinés à être bleus parmi les n tirages effectués au total, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. La probabilité d'obtenir chacun de ces tirages est toujours $\frac{b^k r^{n-k}}{(b+r)^n}$; au final, la probabilité d'obtenir l'un de ces tirages est donc

$$\binom{n}{k}\frac{b^k r^{n-k}}{(b+r)^n}.$$

5

On commence par l'équation homogène, que l'on met sous forme normalisée, en vérifiant au passage qu'il n'y a pas de problèmes d'intervalle de définition ($x \in]-1;1[$ donc le dénominateur ne s'annule pas) :

$$(E_0) \iff y' - \frac{x}{1-x^2}\,y = 0.$$

Il s'agit de trouver une primitive de l'expression $a(x) = -\frac{x}{1-x^2}$. On reconnaît (aux coefficients multiplicatifs près) une expression de la forme $\frac{u'}{u}$, on cherche donc une primitive à partir de $\ln u$, c'est-à-dire $\ln(1-x^2)$. En dérivant cette expression, on trouve $\frac{-2x}{1-x^2} = 2a(x)$. Une primitive correcte est donc $A(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

On en déduit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. On simplifie : pour tout $x \in]-1;1[$,

$$e^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = \left(e^{\ln(1-x^2)}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \;\middle|\; \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Pour la solution générale, on procède maintenant par variation de la constante. Soit λ une fonction dérivable sur $]-1;1[$. On pose, pour tout $x \in]-1;1[$, $y(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Alors

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in]-1;1[\;\; (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\
&\iff \forall x \in]-1;1[\;\; (1-x^2)\left(\frac{\lambda'(x)\sqrt{1-x^2} + \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right) - x\frac{\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \\
&\iff \forall x \in]-1;1[\;\; \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} + \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \\
&\iff \forall x \in]-1;1[\;\; \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\iff \exists c \in \mathbf{R}\;\; \forall x \in]-1;1[\;\; \lambda(x) = \arccos x + c \\
&\iff \exists c \in \mathbf{R}\;\; \forall x \in]-1;1[\;\; y(x) = \frac{\arccos x + c}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $]-1;1[$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \frac{\arccos x + c}{\sqrt{1-x^2}} \;\middle|\; c \in \mathbf{R} \right\}.$$

6

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$$\frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} = \frac{a(t+1) + b(t-1)}{t^2-1} = \frac{(a+b)t + (a-b)}{t^2-1}.$$

Par identification,

$$\begin{aligned}
\forall t \neq \pm 1\;\; \frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} &\iff \forall t \neq \pm 1\;\; (a+b)t + (a-b) = 1 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ll} a+b=0 & \text{(coef. en } t) \\ a-b=1 & \text{(coef. constant)} \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On peut donc écrire, pour tout $t \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} &= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{1}{2}\Big[\ln(t-1)\Big]_2^3 - \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1)\Big]_2^3 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) - \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{2\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{2} \\ &= \frac{\ln 3 - \ln 2}{2} \simeq 0{,}20.\end{aligned}$$

7

On pourrait théoriquement développer directement la formule $(2+2i)^7$ à l'aide du binôme de Newton, mais c'est un calcul long et pénible. L'idée est de se souvenir que l'écriture algébrique d'un nombre complexe est plutôt adaptée aux additions et soustractions, tandis que les multiplications (donc les puissances) sont plus facile à partir de la forme trigonométrique.

Cherchons donc la forme trigonométrique du nombre $2+2i$. On commence par le module :

$$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

On divise maintenant le nombre par son module et on cherche à reconnaître des valeurs particulières des fonctions cosinus et sinus :

$$\frac{2+2i}{|2+2i|} = \frac{2+2i}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\pi/4}.$$

Au final, $2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2^{3/2}e^{i\pi/4}$, donc

$$\begin{aligned}(2+2i)^7 &= \left(2^{3/2}e^{i\pi/4}\right)^7 = 2^{21/2}e^{i7\pi/4} = 2^{10}2^{1/2}\underbrace{e^{8\pi/4}}_{=1}e^{-\pi/4} \\ &= 1\,024\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1\,024 - 1\,024\,i.\end{aligned}$$

8

Une application linéaire p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$; matriciellement, M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $M^2 = M$. Calculons donc :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ M^2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = M,\end{array}$$

donc M est bien la matrice d'un projecteur. On rappelle que la projection a lieu sur $\operatorname{Ker}(M - I_3)$, parallèlement à $\operatorname{Ker} M$.

Soit $X = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$X \in \operatorname{Ker} M \iff \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -y - z = 0\\ y = 0\\ z = 0\end{cases} \iff y = z = 0.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker} M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; y = z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

De même,

$$X \in \operatorname{Ker}(M - I_3) \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x + y + z = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(M - I_3) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x = -y - z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbf{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

La matrice M est donc la matrice de la projection sur $\operatorname{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right]$, parallèlement à $\operatorname{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right]$.

1296.

9

Notons P_n l'événement « obtenir n Pile » et T « choisir la pièce truquée ». Il est clair que $\mathbf{P}(P_n \mid T) = 1$ et $\mathbf{P}(P_n \mid \overline{T}) = 2^{-n}$. Par ailleurs, l'énoncé nous dit que $\mathbf{P}(T) = \frac{1}{2}$. On applique alors la formule de Bayes, en réécrivant le dénominateur grâce à la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T \mid P_n) &= \frac{\mathbf{P}(P_n \mid T) \cdot \mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(P_n)} = \frac{\mathbf{P}(P_n \mid T) \cdot \mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(P_n \mid T) \cdot \mathbf{P}(T) + \mathbf{P}(P_n \mid \overline{T}) \cdot (1 - \mathbf{P}(T))} \\ &= \frac{1/2}{1/2 + 1/2 \cdot 2^{-n}} = \frac{1}{1 + 2^{1-n}}. \end{aligned}$$

Pour répondre à la question posée, il suffit de résoudre l'inéquation $\mathbf{P}(T \mid P_n) \geq \frac{99}{100}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T \mid P_n) \geq \frac{99}{100} &\iff \frac{1}{1 + 2^{1-n}} \geq \frac{99}{100} \iff 1 + 2^{1-n} \leq \frac{100}{99} \\ &\iff 2^{1-n} \leq \frac{1}{100} \iff 1 - n \leq -\frac{\ln 100}{\ln 2} \\ &\iff n \geq \frac{\ln 100}{\ln 2} + 1 \simeq 7{,}64 \end{aligned}$$

On peut donc être sûr·e à plus de 99% d'avoir choisit la pièce truquée à partir de $n = 8$.

10

(1) $\dim \mathbf{K}_n[X] = n+1$.

(2) Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$. On suppose que le polynôme $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$ est nul.

Supposons que $\lambda_n \neq 0$. Alors $\lambda_n Pn$ est de degré n ; par ailleurs, $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1}$ est une combinaison linéaire de polynômes de degré strictement inférieur à n, donc est de degré strictement inférieur à n. On en déduit que

$$\deg(\underbrace{\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1}}_{\deg < n} + \underbrace{\lambda_n P_n}_{\deg = n}) = n,$$

ce qui est absurde puisque $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$ donc de degré $-\infty$. On en déduit que $\lambda_n = 0$.

Le coefficient λ_n étant nul, la combinaison linéaire se réécrit $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0$. Par le même raisonnement, on montre que $\lambda_{n-1} = 0$ donc, par récurrence immédiate, que tous les λ_i sont nuls. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

S'agissant d'une famille de $n+1$ vecteurs de E, qui est de dimension $n+1$, on en déduit immédiatement qu'il s'agit d'une base de E.

(3) Il s'agit de vérifier que, si $P \in E$, alors $u(P) \in E$ (autrement dit, $\deg u(P) \leq n$). On sait que, pour tout polynôme P, $\deg P' \leq \deg P - 1$ donc $\deg P'' \leq \deg P - 2$. Alors

$$\begin{aligned}\deg u(P) &= \deg((X^2-1)P'' + (2X+1)P') \leq \max(\deg((X^2-1)P''), \deg((2X+1)P')) \\ &\leq \max(2 + \deg P'', 1 + \deg P') \leq \max(2 + P - 2, 1 + P - 1) \\ &\leq \deg P.\end{aligned}$$

Si $P \in E$, on a donc bien $u(P) \in E$, ce qui montre que l'endomorphisme u est bien défini (on pourrait également vérifier que u est bien linéaire, mais c'est une conséquence immédiate de la linéarité de la dérivation et de la distributivité de la multiplication).

(4) Pour construire la matrice d'une application linéaire dans une base, il faut calculer les images des vecteurs de la base de départ, décomposer les résultats sur la base d'arrivée et écrire les coordonnées en colonne. Ici, la base de départ et la base d'arrivée sont la base canonique de E (c'est-à-dire $(1, X, \dots, X^n)$), il s'agit donc d'écrire en colonnes les coefficients de $u(1), u(X), \dots, u(X^n)$.

$u(1) = (X^2-1) \times 0 + (2X+1) \times 0 = 0$ donc la première colonne de la matrice est nulle.

$u(X) = (X^2-1) \times 0 + (2X+1) \times 1 = 2X+1$ donc la deuxième colonne de la matrice est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $k \geq 2$, $(X^k)' = kX^{k-1}$ donc $(X^k)'' = k(k-1)X^{k-2}$. Alors

$$\begin{aligned}u(X^k) &= (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + (2X+1)kX^{k-1} \\ &= (k(k-1) + 2k)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} \\ &= k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2},\end{aligned}$$

la $k+1$-ème colonne de la matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k(k-1) \\ k \\ k(k+1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow k+1\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Au final, la matrice recherchée est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\times 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1\times 2 & 2 & -3\times 2 & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 2\times 3 & 3 & & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 3\times 4 & & -(n-1)(n-2) & 0 \\ & & & 0 & \ddots & n-1 & -n(n-1) \\ & & & & 0 & (n-1)n & n \\ 0 & & & \cdots & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

(5) Si P est un polynôme constant (disons égal à $\lambda \in \mathbf{K}$), alors $u(P) = \lambda u(1) = 0$. On a donc $\mathbf{K}_0[X] \subset \operatorname{Ker} u$.

Si, au contraire, P n'est pas constant, notons $d > 0$ son degré et $a_d \in \mathbf{K}^\star$ son coefficient dominant. On peut alors écrire $P = a_d X^d + Q$, avec $\deg Q < d$. D'après les calculs effectués à la question précédente, $u(P) = a_d u(X^d)$ est de degré d. Et d'après la question (3), $\deg u(Q) \leq \deg Q < d$. Alors

$$\deg(u(P)) = \deg\Big(\underbrace{a_d u(X^d)}_{\deg = d} + \underbrace{u(Q)}_{\deg < d}\Big) > 0 > -\infty$$

On a donc $u(P) \neq 0$, donc $P \notin \operatorname{Ker} u$.

Au final, on a montré que tous les polynômes constants appartiennent à $\operatorname{Ker} u$ et qu'aucun polynôme non-constant n'y appartient : on a donc $\operatorname{Ker} u = \mathbf{K}_0[X]$.

(6) D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u = \dim E$. On sait que $\dim E = n+1$ et on a montré à la question précédente que $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, on en déduit donc que l'application u est de rang n.

Autre méthode : la matrice déterminée à la question précédente est échelonnée, on voit qu'elle possède n pivots (le premier coefficient non nul de chaque ligne sauf la deuxième), ainsi $\operatorname{rg} u = n$.

Autre méthode : on considère la famille des vecteurs colonne de la matrice de u déterminée à la question précédente. Cette famille n'est pas libre car le premier vecteur est nul. En revanche, une fois le vecteur nul enlevé, il reste une famille de n vecteurs de $\mathbf{R}^{n+1}$ dont on peut assez facilement montrer qu'elle est libre (pour avoir une combinaison linéaire nulle, il faut que le coefficient du dernier vecteur soit nul pour avoir un zéro sur la dernière ligne, mais alors il faut que le coefficient de l'avant-dernier vecteur soit nul pour avoir un zéro sur l'avant-dernière ligne, mais alors...). Le rang de la famille des vecteurs colonne est donc n, d'où $\operatorname{rg} u = n$.

Autre méthode : on peut considérer la famille des vecteurs lignes de la matrice et montrer qu'elle est de rang n mais c'est un peu plus délicat.

11

(1) On pose, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$. Il s'agit de montrer que la fonction φ est positive ou nulle.

Par composition, φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$. On en déduit que φ est croissante sur $\mathbf{R}_+$: pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0 - \ln 1 = 0$.

On a donc bien, pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

(2) Procédons par récurrence sur n : si $n = 1$, on a $u_1 = 1$ et $\ln(1+1) = \ln 2 \simeq 0.7$, donc la propriété est vraie.

Soit maintenant $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose que $\ln(n+1) \leq u_n$. Par définition, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$. Mais d'après la question précédente, $\frac{1}{n+1} \geq \ln(1 + \frac{1}{n+1}) = \ln \frac{n+2}{n+1}$. Par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \geq \ln(n+1)$. On a donc

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n+1) + \ln \frac{n+2}{n+1} = \ln\left((n+1) \cdot \frac{n+2}{n+1}\right) = \ln(n+2),$$

ce qui est bien l'inégalité recherchée au rang $n+1$.

Ainsi, on a bien $\ln(n+1) \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

(3) Soit $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k-1; k]$, on a $t \leq k$ donc $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k}$. Par croissance de l'intégrale (car $k - 1 \leq k$), on en déduit que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k} \int_{k-1}^{k} \mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

(4) L'inégalité est trivialement vraie pour $n = 1$ (les deux membres sont égaux à 1). Soit donc $n \geq 2$. On va sommer l'inégalité de la question précédente pour k allant de 2 à n :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Mais la somme d'intégrales se simplifie grâce à la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \Big[\ln t\Big]_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n.$$

On a donc, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 1 + \ln n$.

(5) D'après les questions (2) et (4), on a, pour tout $n \geq 2$, l'encadrement :

$$\ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln n.$$

Par croissance de la fonction ln, on en déduit

$$\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n.$$

En divisant par $\ln n$ (qui est strictement positif car $n \geq 2$), on obtient alors :

$$1 \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Pour n tendant vers $+\infty$, le membre de gauche tend trivialement vers 1. Le membre de droite également, puisque $\ln n \longrightarrow +\infty$ donc $\frac{1}{\ln n} \longrightarrow 0$. Par théorème d'encadrement, on en déduit

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1,$$

autrement dit $u_n \sim \ln n$.