À rendre pour le lundi 3 octobre 2022

Dans ce problème, n désigne un entier non nul et a et b sont deux nombres réels. Pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on pose

$$\varphi_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n(X - \tfrac{a+b}{2})P.$$

I. Étude de φ_1

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc, pour tout $P \in \mathbf{R}_1[X]$:

$$\varphi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - n(X - \tfrac{a+b}{2})P.$$

Q1. Montrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbf{R}_1[X]$.

Q2. Soit $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbf{R}_1[X]$. Déterminer M_1, la matrice représentative de φ_1 dans la base $\mathcal{B}_1$.

Q3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ_1 soit bijective.

Q4. On suppose, dans cette question uniquement, que $a \neq b$.

(a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (X-a, X-b)$ est une base de $\mathbf{R}_1[X]$.

(b) Calculer $\varphi_1(X-a)$ et $\varphi_1(X-b)$; en déduire la matrice M représentative de φ_1 dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$. Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$?

(d) Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices M, M_1 et P.

(e) Soit $p \in \mathbf{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question **Q4.**(d), une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).

Q5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble :

$$\Gamma = \left\{\alpha I_2 + \beta M_1 + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3 \mid (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbf{R}^4\right\}.$$

(a) Montrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

(b) Montrer que les matrices M_1^2 et M_1^3 peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de M_1 et I_2.

(c) Déterminer une base de Γ.

Q6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question **Q5.**(b), déterminer l'application φ_1^2. En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques.

II. Quelques généralités sur φ_n

Q7. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q8. On se propose dans cette question de déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_n)$. On pose $\alpha = \max(a,b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha; +\infty[$.

(a) Montrer que $f\colon x \mapsto \dfrac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}$ est continue sur I.

(b) Déterminer une primitive F de la fonction f sur I. On pourra trouver deux réels λ, μ tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{\lambda}{x-a} + \frac{\mu}{x-b}$.

(c) Vérifier que la fonction $g\colon x \mapsto \sqrt{(x-a)^n(x-b)^n}$ est solution sur I de l'équation différentielle

$$(E)\colon y' - \frac{nx - n\frac{a+n}{2}}{(x-a)(x-b)}y = 0.$$

On admet que les seules solutions de (E) sont les multiples de la fonction g.

(d) On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbf{N}^\star$. Déduire de la question **Q8.**(c) une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p})$..

(e) On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbf{N}$. Déduire de la question **Q8.**(c) une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1})$ (on pourra discuter suivant les valeurs de a et b).

(d'après Mines Albi-Alès-Douai-Nantes 2008)