À rendre pour le lundi 14 novembre 2022

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On définit l'application $f\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ par :

$$\forall z\in\mathbf{C}\quad f(z)=2z-z^2.$$

Partie A – Construction géométrique. Dans cette partie, on fixe un nombre complexe $z\in\mathbf{C}$ de module $|z|=1$ et tel que $z\neq 1$. On introduit le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1=z^2$, le point M_2 d'affixe $z_2=2z$ et le point N d'affixe $f(z)$.

Q1. Montrer que le quadrilatère OM_1M_2N est un parallélogramme.

Q2. Donner le module de z_1, puis exprimer son argument en fonction de celui de z.

Q3. Déduire des questions précédentes une construction géométrique simple du point N.

Partie B – Tracé d'une courbe paramétrée. Pour tout $t\in\mathbf{R}$, on note $M(t)$ le point d'affixe e^{it} et $N(t)$ le point d'affixe $f(e^{it})$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées cartésiennes du point $N(t)$.

Q4. Montrer que, pour tout $t\in\mathbf{R}$, on a

$$\begin{cases} x(t)=2\cos t-\cos(2t)\\ y(t)=2\sin t-\sin(2t)\end{cases}$$

Le reste de cette partie se consacre à l'étude de la courbe paramétrée donnée par les fonctions x et y.

Q5. (a) Montrer que les fonctions x et y sont 2π-périodiques.

(b) Pour tout réel $t\in\mathbf{R}$, montrer que le point $N(-t)$ se déduit du point $N(t)$ par une symétrie que l'on précisera.

(c) Déduire des deux questions précédentes un intervalle $I=[0;\alpha]$ de longueur minimale sur lequel effectuer l'étude de la courbe paramétrée.

Q6. (a) Montrer que les fonctions x et y sont dérivables ; déterminer les expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour tout $t\in[0;\pi]$ et étudier leur signe.

(b) Dresser le tableau de variations conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0;\pi]$. On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t\in\{0;\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\pi\}$.

Q7. Pour tout réel $t\in[0;\pi]$, justifier que le vecteur $\overrightarrow{M(t)N(t)}$ est un vecteur normal de la tangente à la courbe paramétrée au point $N(t)$.

Q8. Tracer la courbe paramétrée. On fera apparaître en particulier les points $N(t)$ pour $t\in\{\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3};\pi\}$ ainsi que les tangentes en ces points.

Q9. Calculer la longueur de la courbe paramétrée.

(d'après ATS 2021)