Samedi 17 septembre 2022 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice I. Calculs

Q1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^3}$. Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbf{R}$, en précisant la valeur prise en -1.

Q2. Donner une primitive sur $\mathbf{R}$ des fonctions $f\colon x \mapsto (3x-1)(3x^2-2x+3)^3$ (*indication : ne pas développer !*) et $g\colon x \mapsto x\sin(x^2)$.

Q3. (a) Linéariser l'expression $\cos^5(t)$.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Retrouver ce résultat à l'aide du changement de variables $u = \sin t$.

Q4. Le but de cette questions est de déterminer une primitive de la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$.

(a) Trouver trois réels a, b, c tels que, pour tout $t \neq 1$,

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b(2x+1)}{x^2+x+1} + \frac{c}{x^2+x+1}$$

(b) Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbf{R}$ (*indication : on pourra mettre le dénominateur sous forme canonique et utiliser le changement de variables* $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$).

(c) En déduire une primitive de f, en précisant son ou ses intervalles de définition.

Exercice II. Fonctions trigonométriques hyperboliques

Dans ce problème, on étudie les *fonctions trigonométriques hyperboliques* sh et ch, définies sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Étude de fonctions.

Q1. (a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.

(b) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables et que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$ et $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t$.

(c) Dériver la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(t) = (\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. En déduire une relation entre $(\operatorname{ch} t)^2$ et $(\operatorname{sh} t)^2$.

Q2. Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de ch et sh en 0.

Q3. (a) En se basant sur les variations de sh, montrer que l'équation $\operatorname{sh} t = 1$, d'inconnue t, admet une unique solution réelle, que l'on notera dans la suite α.

(b) On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

(c) En déduire la valeur exacte de α.

(d) Montrer que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Q4. Montrer que $\mathrm{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$.

Suite d'intégrales. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^{2n}\,\mathrm{d}t$ (le nombre $\alpha \in [0;1]$ étant défini dans la partie précédente).

Q5. Montrer que $I_0 = \alpha$.

Q6. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et strictement positive (*indication : on pourra remarquer que, pour tout $t \in [0;\alpha]$, on a $0 \leq \operatorname{sh} t \leq 1$*). En déduire qu'elle est convergente.

Q7. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_{n+1} = \mathrm{ch}(\alpha) - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$$

(*indication : on pourra remarquer que* $(\operatorname{sh} t)^{2n+2} = (\operatorname{sh} t)^{2n+1} \operatorname{sh} t$)

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

(c) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

(d'après ATS 2019)

Exercice III. Une chaîne de Markov

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3… Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.

À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.

À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.

On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2 (c'est-à-dire que $X_n(\Omega) = \{0,1,2\}$).

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit le vecteur colonne $U_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ défini par

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Enfin, on rappelle la *formule de transfert* : si X est une variable aléatoire réelle et f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, alors

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x).$$

Mise en place du problème.

Q1. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $\mathbf{E}(X_0) = 2$. Déterminer la variance de X_0.

Q2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

Q3. Déterminer, pour tout entier naturel n et sans justification, les probabilités conditionnelles :

$$\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0); \quad \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2); \quad \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1); \quad \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0);$$
$$\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2); \quad \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1); \quad \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).$$

Q4. Soit $n \geq 0$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\mathbf{P}(X_n = 0)$, $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = 2)$.

Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Espérance et variance des X_n. On se propose de déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi. On introduit les matrices de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$ suivantes :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q5. Calcul de l'espérance.

(a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, vérifier que $\mathbf{E}(X_n) = L_1 U_n$.

(b) Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(X_n)$.

(c) Exprimer alors $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n.

Q6. Calcul du moment d'ordre 2.

(a) À l'aide de la formule de transfert, exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.

(b) Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on déterminera, tels que $L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2$.

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}\mathbf{E}(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

(d) On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Vérifier que cette suite vérifie la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

(e) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = \mathbf{E}(X_n^2) - u_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison.

(f) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(X_n^2)$ en fonction de n.

Q7. Déduire des deux questions précédentes l'expression, pour tout $n \in \mathbf{N}$, de $\mathbf{V}(X_n)$ en fonction de n.

(d'après CCINP 2016)

Exercice IV. Étude d'une application linéaire

On s'intéresse à l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que, si f est un endomorphisme, on note $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc. (et, par convention, $f^0 = \mathrm{id}$).

IV.A. Généralités.

Q1. Calculer A^2 et A^3. En déduire que $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$.

Q2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Q3. Déterminer l'image et le noyau de f.

IV.B. Recherche d'une base adaptée.

Q4. On s'intéresse à l'ensemble $F_1 = \{u \in \mathbf{R}^3 \mid f(u) = u\}$. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Q5. Montrer que F_1 est de dimension 1 et en donner une base (e_1).

Q6. On pose $e_2 = (0, 0, 1)$. Exprimer $f(e_2)$ en fonction de e_1 et e_2.

Q7. Montrer que $F_2 = \{u \in \mathbf{R}^3 \mid f(u) = 2u\}$ est de dimension 1 et en donner une base (e_3).

Q8. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Q9. Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.

IV.C. Calcul des puissances de A.

Q10. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer $f^k(e_2)$.

Q11. En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la matrice T^k.

Q12. Donner une relation entre T et A. En déduire que

$$A^k = PT^kP^{-1}, \qquad \text{où} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On ne demande pas de justifier que P est inversible.

Q13. Calculer P^{-1}.

Q14. En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la matrice A^k.

⋆ ⋆

⋆