EXERCICE I. CALCULS

Q1. La fonction f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ par composition. Pour calculer la limite en -1 , on remarque que -1 racine du dénominateur et on le factorise donc par $x + 1 : 1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$. Ainsi, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow -1} \frac{1}{3} \in \mathbf{R}$. On peut donc prolonger f par continuité en -1 en posant $f(-1) = \frac{1}{3}$.

Q2. Pour f , on reconnaît une écriture de la forme $u'w^3 : f(x) = \frac{1}{2}(6x - 2)(3x^2 - 2x + 3)^3$, que l'on primitive donc sous la forme $\frac{u^4}{4}$, soit $F(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4 + c$.

Pour g , on reconnaît une écriture de la formue $u' \sin(u)$ et on en déduit $G(x) = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$.

Q3. (a) On utilise la formule d'Euler pour le cosinus, puis on développe à l'aide du binôme de Newton :

$$\cos^5(t) = \frac{1}{2^5}(e^{it} + e^{-it})^5 = \frac{1}{2^5}(e^{i5t} + 5e^{i3t} + 10e^{it} + 10e^{-it} + 5e^{-i3t} + e^{-i5t})$$

On regroupe alors les termes d'exposants opposés et de mêmes coefficients pour faire réapparaître des cosinus : $e^{i5t} + e^{-i5t} = 2\cos(5t)$, $5e^{i3t} + 5e^{-i3t} = 10\cos(3t)$ et $10e^{it} + 10e^{-it} = 20\cos t$, d'où :

$$\cos^5(t) = \frac{1}{16} \cos(5t) + \frac{5}{16} \cos(3t) + \frac{5}{8} \cos(t).$$

(b) D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^5(t) dt &= \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} \cos(5t) dt + \frac{5}{16} \int_0^{\pi/2} \cos(3t) dt + \frac{5}{8} \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{\sin(5t)}{5} \right]_0^{\pi/2} + \frac{5}{16} \left[\frac{\sin(3t)}{3} \right]_0^{\pi/2} + \frac{5}{8} \left[\sin(t) \right]_0^{\pi/2} dt \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 10 \right) = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

(c) On fait le changement de variables $u = \sin t$, $du = \cos t dt$. On remarque que $\cos^5(t) dt = \cos^4(t) \cos t dt = (1 - \sin^2(t))^2 \cos t dt$, d'où

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5(t) dt = \int_0^1 (1 - u^2)^2 du = \int_0^1 (1 - 2u^2 + u^4) du = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

Q4. (a) On met au même dénominateur le membre de droite, on développe et on regroupe :

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b(2x+1)}{x^2+x+1} + \frac{c}{x^2+x+1} = \frac{(a+2b)x^2 + (a-b+c)x + a-b-c}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

On remarque que $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$, on peut donc identifier le numérateur à 1 :

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a - b + c = 0 \\ a - b - c = 1 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{6} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \frac{1}{\frac{4(x+1/2)^2}{3} + 1} = \frac{4}{3} \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1}$$

On fait donc, comme suggéré, le changement de variables $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(u) + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

(c) D'après les deux questions précédentes,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(\underbrace{x^2+x+1}_{>0}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, \end{aligned}$$

sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ (suivant l'intervalle, on peut remplacer le $|x-1|$ par $1-x$ ou $x-1$ respectivement).

EXERCICE II. FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES HYPERBOLIQUES

Étude de fonctions.

Q1. (a) Les deux fonctions sont définies sur $\mathbf{R}$ qui est bien symétrique par rapport à l'origine. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\text{ch}(-t) = \text{ch } t$ et $\text{sh}(-t) = -\text{sh } t$ donc ch est paire et sh impaire.

(b) Les deux fonctions sont dérivables par composition. Le calcul est immédiat par la formule de dérivation des composées.

(c) La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ par composition. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - 2 \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t = 0$. On en déduit que f est constante sur l'intervalle $\mathbf{R}$. En $t = 0$, on a $\operatorname{ch} t = 1$ et $\operatorname{sh} t = 0$ donc $f(0) = 1$. On a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = 1$, autrement dit $(\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2 = 1$.

Q2. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t > 0$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Par ailleurs, $\operatorname{ch}'(t) = \operatorname{sh} t$ qui est du signe de t (en effet, par stricte croissance de l'exponentielle, $e^t > e^{-t}$ ssi $t > -t$, ssi $t > 0$). La fonction ch est donc strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. Les limites en $\pm\infty$ sont évidentes, on en déduit les tableaux de variations :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch} t$	$+\infty$	1	$+\infty$
$\operatorname{sh} t$	$-\infty$	0	$+\infty$

Q3. (a) La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$, on a $\operatorname{sh} 0 = 0$ et $\operatorname{sh} t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc il existe $x > 0$ tel que $\operatorname{sh} x > 1$. D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $\alpha \in]0; x[\subset \mathbf{R}$ tel que $\operatorname{sh} \alpha = 1$.

(b) $z^2 - 2z - 1 = e^{2\alpha} - 2e^\alpha - 1 = e^\alpha(e^\alpha - 2 - e^{-\alpha}) = e^\alpha(2 \operatorname{sh} \alpha - 2) = 0$ car $\operatorname{sh} \alpha = 1$ par définition.

(c) On résout $z^2 - 2z - 1 = 0$: on a $\Delta = 8 > 0$ donc $z = 1 \pm \sqrt{2}$. On cherche maintenant α tel que $e^\alpha = 1 \pm \sqrt{2}$. L'équation n'admet pas de solution dans le cas $1 - \sqrt{2}$ car c'est un nombre négatif; dans le cas $1 + \sqrt{2}$ l'unique solution est $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$. On vérifie :

$$\operatorname{sh}(\ln(1 + \sqrt{2})) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right) = \frac{3 + 2\sqrt{2} - 1}{2(1 + \sqrt{2})} = 1.$$

(d) On a montré à la question (a) que $\alpha \geq 0$ (c'est également évident à l'aide de la formule $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$ car $1 + \sqrt{2} \geq 1$). Pour la majoration, on peut par exemple remarquer que $e > \frac{5}{2}$ et $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ donc $\operatorname{sh} 1 = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} > 1$. Par stricte croissance de la fonction sh , on a $\operatorname{sh} \alpha \leq \operatorname{sh} 1$ donc $\alpha \leq 1$.

Q4. $\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right) = \frac{3 + 2\sqrt{2} + 1}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Suite d'intégrales.

Q5. $I_0 = \int_0^\alpha 1 dt = 1 \cdot (\alpha - 0) = \alpha$ (intégrale d'une constante).

Q6. Pour tout $t \in [0; \alpha]$, on a $0 \leq \operatorname{sh} t \leq 1$ (par croissance de la fonction sh). On en déduit que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq (\operatorname{sh} t)^{2n+2} \leq (\operatorname{sh} t)^{2n}$. Par croissance de

l'intégrale (car $0 \leq \alpha$), on en déduit $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Autrement dit, la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

Q7. (a) La fonction sh (et donc toutes ses puissances) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^\alpha \underbrace{(\operatorname{sh} t)^{2n+1}}_{\operatorname{sh} t} dt = \left[(\operatorname{sh} t)^{2n+1} \operatorname{ch} t \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2n+1) \operatorname{ch} t (\operatorname{sh} t)^{2n} \operatorname{ch} t dt \\ &= \operatorname{ch} \alpha - (2n+1) \int_0^\alpha \underbrace{(\operatorname{ch} t)^2}_{=1+(\operatorname{sh} t)^2} (\operatorname{sh} t)^{2n} dt = \operatorname{ch} \alpha - (2n+1)(I_n + I_{n+1}). \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, $(1 + 2n + 1)I_{n+1} = \operatorname{ch} \alpha - (2n + 1)I_n$ et donc, d'après **Q4**, $I_{n+1} = \frac{\sqrt{2} - (2n+1)I_n}{2n+2}$.

(c) On a montré à **Q6** que la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ . On en déduit que la suite extraite (I_{n+1}) converge vers le même ℓ . Par ailleurs, $\frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2} I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 - 1 \cdot \ell = -\ell$, autrement dit $(I_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $-\ell$. Par unicité de la limite, on a donc $\ell = -\ell$, d'où $\ell = 0$.

EXERCICE III. UNE CHAÎNE DE MARKOV

Q1. À l'instant initial, les deux ampoules sont allumées, autrement dit $X_0 = 2$ avec probabilité 1 (loi certaine). On a donc $\mathbf{E}(X_0) = 2$ et $\mathbf{V}(X_0) = 0$.

Q2. Si $X_n = 2$, cela signifie que les deux ampoules sont allumées à l'instant n . Pour avoir $X_{n+1} = 2$, il faut qu'elles restent allumées. Chacune reste allumée avec probabilité $\frac{1}{2}$, et les deux ampoules sont indépendantes, donc la probabilité qu'elles restent allumées est $\mathbf{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Au contraire, pour avoir $X_{n+1} = 1$, il faut qu'exactement une ampoule grille, c'est-à-dire qu'une grille tandis que l'autre reste allumée. Comme les ampoules sont indépendantes, la probabilité que la première grille tandis que la deuxième reste allumée est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; de même pour la probabilité que la deuxième grille tandis que la première reste allumée. Au final, $\mathbf{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Q3. On a $\mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = 0$, $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$, $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0$ et $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1$.

Q4. Les événements $X_n = 0$, $X_n = 1$ et $X_n = 2$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)\mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)\mathbf{P}(X_n = 1) \\ &\quad + \mathbf{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)\mathbf{P}(X_n = 2) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 2).\end{aligned}$$

De même, $\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 2)$ et $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 2)$, autrement dit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Q5. (a) Par définition, $\mathbf{E}(X_n) = 0 \cdot \mathbf{P}(X_n = 0) + 1 \cdot \mathbf{P}(X_n = 1) + 2 \cdot \mathbf{P}(X_n = 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot U_n$.

(b)

$$L_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} L_1.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = L_1 U_{n+1} = L_1 A U_n = \frac{1}{2} L_1 U_n = \frac{1}{2} \mathbf{E}(X_n).$$

(c) Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{2^n} \mathbf{E}(X_0) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Q6. (a) D'après la formule de transfert, $\mathbf{E}(X_n^2) = 0^2 \cdot \mathbf{P}(X_n = 0) + 1^2 \cdot \mathbf{P}(X_n = 1) + 2^2 \mathbf{P}(X_n = 2) = L_2 U_n$.

(b)

$$L_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

On a donc, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2 \iff \begin{cases} 0 = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta \\ \frac{1}{2} = \alpha + \beta \\ \frac{3}{2} = 2\alpha + 4\beta \end{cases} \iff \alpha = \beta = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $L_2 A = \frac{1}{4} L_1 + \frac{1}{4} L_2$.

(c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a donc

$$\mathbf{E}(X_{n+1})^2 = L_2 U_{n+1} = L_2 A U_n = \frac{1}{4} L_1 U_n + \frac{1}{4} L_2 U_n = \frac{1}{4} \mathbf{E}(X_n) + \frac{1}{4} \mathbf{E}(X_n^2),$$

or d'après la question (5) $\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ donc $\frac{1}{4} \mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{4 \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$, ce qui montre le résultat souhaité.

(d) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2^n}$. Par ailleurs,

$$\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

On a donc bien $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.

(e) Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors, d'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \mathbf{E}(X_{n+1}^2) - u_{n+1} = \frac{1}{4} \mathbf{E}(X_n^2) + \frac{1}{2^{n+1}} - \left(\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \mathbf{E}(X_n^2) - \frac{1}{4} u_n = \frac{1}{4} v_n.\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

(f) On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{1}{4^n} v_0 = \frac{1}{4^n} (\mathbf{E}(X_0^2) - \frac{1}{2^{-1}}) = \frac{1}{2^{2n}} (4 - 2) = \frac{1}{2^{2n-1}}$. On en déduit que $\mathbf{E}(X_n^2) = v_n + u_n = \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1+2^n}{2^{2n-1}}$.

Q7. D'après la formule de König-Huygens, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{1+2^n}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{2^n - 1}{2^{2n-1}}.$$

EXERCICE IV. ÉTUDE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

IV.A. Généralités.

Q1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 7 & -7 & 1 \end{pmatrix}$, et on vérifie que $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$.

Q2. D'après la question précédente, $\frac{1}{2} A(A^2 - 4A + 5I_3) = I_3$, donc A est inversible

$$\text{et } A^{-1} = \frac{1}{2} (A^2 + 4A + 5I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q3. La matrice A étant inversible, f est un automorphisme donc $\text{Im} f = \mathbf{R}^3$ et $\text{Ker} f = \{0\}$.

IV.B. Recherche d'une base adaptée.

Q4. $F_1 = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbf{R}^3})$ qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Q5. Soit $u = (x; y; z) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$f(u) = u \iff \begin{cases} x + z = x \\ -x + 2y + z = y \\ x - y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \iff u \in \text{Vect}((1; 1; 0)).$$

Ainsi F_1 admet pour base $(e_1 = (1; 1; 0))$ et est donc de dimension 1.

Q6. On a $f(e_2) = (1; 1; 1) = e_1 + e_2$.

Q7. Avec les notations de la question (5),

$$u \in F_2 \iff \begin{cases} x + z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ x - y + z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

donc F_2 est de dimension 1, une base étant donnée par $(e_3 = (1; 0; 1))$.

Q8. $\mathcal{B}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbf{R}^3$ qui est de dimension 3, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$. On suppose $\lambda e_1 +$

$$\mu e_2 + \nu e_3 = 0, \text{ alors } \begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{cases} \text{ donc } \lambda = \mu = \nu = 0. \text{ La famille } \mathcal{B} \text{ est}$$

donc libre, donc une base de $\mathbf{R}^3$.

Q9. Par définition de e_1 , $f(e_1) = e_1$ et $f(e_3) = 2e_3$, et on a calculé que $f(e_2) =$

$$e_1 + e_2. \text{ On en déduit donc } T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

IV.C. Calcul des puissances de A .

Q10. On montre par récurrence que $f^k(e_2) = ke_1 + e_2$.

Q11. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^k(e_1) = e_1$ et $f^k(e_3) = 2^k e_3$, d'où

$$T^k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Q12. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la

base $\mathcal{B}$, donc d'après la formule de changement de base, on a $T = P^{-1}AP$, donc $A = PTP^{-1}$, puis $A^k = PT^kP^{-1}$.

$$\mathbf{Q13.} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Q14.} A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k - k & 1 + k - 2^k & k \\ -k & 1 + k & k \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{pmatrix}.$$