Samedi 19 novembre 2022 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

PROBLÈME I

Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{1; 4\}$. On se place dans $E = \mathbf{R}_n[X]$. On définit l'application f sur E par

$$f: P \mapsto (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'.$$

- Q1.** Montrer que f est un endomorphisme de E .
Q2. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^k)$ pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. En déduire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E .

Dans toute la suite du problème, on se place dans le cas $n = 2$.

- Q3.** Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E . Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

- Q4.** L'endomorphisme f est-il bijectif? Justifier.
Q5. Calculer les valeurs propres de f . Peut-on, à ce stade, conclure à la diagonalisabilité de f ?
Q6. Déterminer des bases des sous-espaces propres de f .
Q7. Déterminer une matrice P , inversible et de première ligne égale à $(1 \ 1 \ 1)$, telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{avec } \alpha > \beta > \gamma.$$

Préciser les valeurs de α , β et γ .

- Q8.** Calculer P^{-1} .

(d'après CCINP TPC 2022)

PROBLÈME II

On rappelle que, pour tous x réel strictement positif et α réel, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$. On considère la fonction $g: x \mapsto x^x$ définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

II.A. Étude de la fonction g .

- Q1.** Calculer $g(1)$ et justifier que g est dérivable sur I .
Q2. Dresser le tableau de variations de g et préciser ses limites aux bornes de I .
Q3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g .
Q4. On admet que, pour $x \rightarrow 1$, $g(x) = 1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$. Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g .

Q5. Représenter sur l'intervalle $]0; 2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue dans la question précédente sur le même graphique.
On donne $e^{-1} \simeq 0,37$ et $g(e^{-1}) \simeq 0,69$.

Q6. À l'aide du graphique, justifier l'encadrement $e^{-1} < \int_0^1 x^x dx < 1$.

II.B. Une approximation plus précise de $\int_0^1 x^x dx$.

II.1. Un calcul d'intégrales.

Q7. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\int_0^1 x^n dx$.

Q8. Soient $(n, k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$. Justifier que la fonction $x \mapsto x^n \ln(x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.

Dans la suite, on notera de la même manière la fonction prolongée.

Q9. Soient $(n, k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^k dx = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln(x))^{k-1} dx.$$

Q10. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. À l'aide d'une récurrence sur k , en déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\int_0^1 (\ln(x))^k dx = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$$

Justifier que cette égalité est toujours vraie si $n = k = 0$.

II.2. Expression de $\int_0^1 x^x dx$ à l'aide d'une série.

Q11. Soit $z \in \mathbf{R}$. Montrer que la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est convergente.

On admet que, pour tout $z \in \mathbf{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Q12. Justifier que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x \ln(x))^n}{n!} dx$ (on admettra que, dans le cas présent, la propriété de linéarité de l'intégrale reste valable pour une somme infinie).

Q13. En déduire l'égalité $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Q14. Soit $p \in \mathbf{N}$. On note $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ le reste au rang p de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$. On admet que $|R_p| \leq \frac{1}{(p+2)^{p+2}}$.

(a) Donner une valeur approchée de $\int_0^1 x^x dx$ à $\frac{1}{27}$ près.

(b) Écrire en Python une fonction `approximation(h)` qui prend en paramètre un réel strictement positif h et renvoie un nombre réel représentant une approximation de $\int_0^1 x^x dx$ à h près.

(d'après CCINP 2021)

PROBLÈME III

On considère dans le plan une droite $\mathcal{D}$ et un point F situé à une distance $p > 0$ de la droite $\mathcal{D}$. On choisit un repère orthonormé (O, x, y) dans lequel la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -\frac{p}{2}$ et le point F a pour coordonnées $(0, \frac{p}{2})$.

III.A. Étude d'une parabole. Étant donnée une fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, on considère, pour tout réel t , les deux points suivants :

- le point $P(t)$, de coordonnées $(t, f(t))$;
- le point $H(t)$, de coordonnées $(t, -\frac{p}{2})$.

Q1. Pour tout réel t , montrer que le point $P(t)$ est équidistant de la droite $\mathcal{D}$ et du point F si et seulement si l'on a $f(t) = \frac{t^2}{2p}$.

Dans la suite du problème, on considère la fonction f telle que définie dans la question **Q1**.

Q2. Tracer la courbe $\mathcal{P} = \{P(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

Q3. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, expliciter une équation de la tangente $\mathcal{T}(t)$ à la courbe $\mathcal{P}(t)$ au point $P(t)$.

Q4. (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, montrer que le triangle de sommets $P(t), F, H(t)$ est isocèle en $P(t)$.
(b) Préciser les coordonnées du point $I(t)$, milieu du côté $[FH(t)]$ de ce triangle.
(c) Quelle est la courbe décrite par le point $I(t)$ lorsque t décrit $\mathbf{R}$?

Q5. (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, vérifier que la droite $(P(t)I(t))$ est égale à la droite $\mathcal{T}(t)$.
(b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, la droite $\mathcal{T}(t)$ est égale à la hauteur issue du sommet $P(t)$ ainsi qu'à la médiatrice du côté $[FH(t)]$ dans le triangle de sommets $P(t), F, H(t)$.

Q6. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, écrire l'équation de la normale passant par O à la droite $\mathcal{T}(t)$. En déduire les coordonnées de la projection $M(t)$ de O sur $\mathcal{T}(t)$.

III.B. Étude de la podaire de $\mathcal{P}$ par rapport à son sommet O . On considère l'application association à tout réel t le point $M(t)$ dont les coordonnées sont :

$$x(t) = \frac{t^3}{2(t^2 + p^2)}; \quad y(t) = \frac{-pt^2}{2(t^2 + p^2)}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée $\mathcal{C} = \{M(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

Q7. Déterminer pour tout réel t les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$.

Q8. Dresser un tableau de variation des fonctions x et y sur $\mathbf{R}_+$.

Q9. (a) Pour tout $t > 0$, déterminer la pente de la droite $(M(0)M(t))$ et sa limite pour $t \rightarrow 0$.
(b) En déduire la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(0)$.

Q10. Construire sur une même figure rapportée au repère (O, x, y) les deux courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ dans le cas où la distance p est choisie égale à 2.

(d'après EPITA 2021)

★ ★
★