Problème I

Q1. On montre que f est linéaire : soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $f(\lambda P + Q) = (X - X^2)(\lambda P + Q)'' + (1 - 2X)(\lambda P + Q)' = \lambda\left((X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'\right) + (X - X^2)Q'' + (1 - 2X)Q' = \lambda f(P) + Q$.

De plus, si $\deg P \leq n$, alors $\deg P' \leq n - 1$ et $\deg P'' \leq n - 2$ donc $\deg(f(P)) \leq n$; autrement dit, $f(P) \in E$.

Ainsi, f est un endomorphisme de E.

Q2. $f(1) = 0$, $f(X) = 1 - 2X$ et, pour tout $k \geq 2$, $f(X^k) = (X - X^2)k(k-1)X^{k-2} + (1 - 2X)kX^{k-1} = (-k(k-1) - 2k)X^k + (k(k-1) + k)X^{k-1} = -k(k+1)X^k + k^2X^{k-1}$. Ainsi, la matrice de f dans la base canonique de E est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -6 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n(n+1) \end{pmatrix}$$

Q3. Il suffit d'appliquer la question précédente au cas $n = 2$; on ne conserve que les trois premières lignes et les trois premières colonnes de la matrice ci-dessus.

Q4. On calcule facilement que $\det(A) = 0$ (déterminant triangulaire), on en déduit que A n'est pas inversible, autrement que f n'est pas une bijection.

Q5. On a, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)(\lambda + 6)$ (déterminant triangulaire). Les valeurs propres de A (donc de f) sont donc 0, -2 et -6, toutes de multiplicité 1. L'endomorphisme f admet donc trois valeurs propres distinctes alors que l'espace E est de dimension 3 ; on en déduit que f est diagonalisable.

Q6. On va déterminer les sous-espaces propres de la matrice A et en déduire ceux de f. Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$. Alors :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ -6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ d'où } E_0 = \mathrm{Vect}(1)$$

$$AX = -2X \iff \begin{cases} y = -2x \\ -2y + 4z = -2y \\ -6z = -4z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases} \text{ d'où } E_{-2} = \mathrm{Vect}(1 - 2X)$$

$$AX = -6X \iff \begin{cases} y = -6x \\ -2y + 4z = -6y \\ -6z = -6z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -6x \\ y = -z \end{cases} \text{ d'où } E_{-6} = \mathrm{Vect}(1 - 6X + 6X^2)$$

Q7. On en déduit que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, avec $\alpha = 0$, $\beta = -2$ et $\gamma = -6$.

Q8. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Problème II

II.A. Étude de la fonction g.

Q1. On a $g(1) = e^{1\ln(1)} = e^0 = 1$. La fonction g est dérivable sur I par composition.

Q2. Pour tout $x \in I$, on a $g'(x) = (x\ln(x))'e^{x\ln x} = (\ln(x)+1)e^{x\ln x}$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

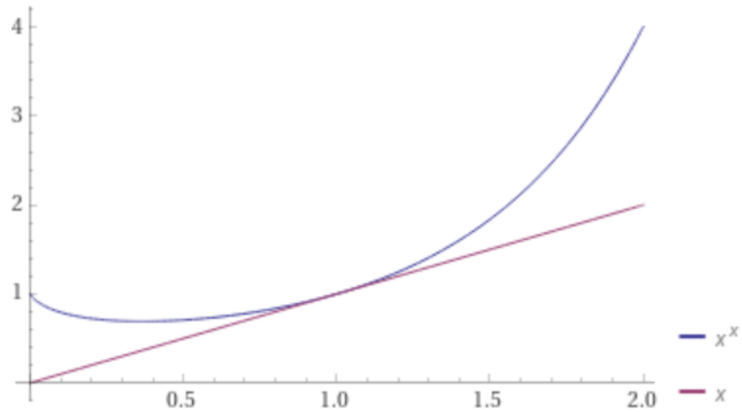
Pour $x \to 0$, $x\ln(x) \to 0$ par croissance comparée donc $g(x) = e^{x\ln(x)} \to 1$ par continuité de l'exponentielle. Pour $x \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$. D'où le tableau :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$g(x)$	1	$\searrow$	$g(1/e)$	$\nearrow$	$+\infty$

Q3. On a $g(1) = 1$ et $g'(1) = 1$ donc la tangente a pour équation $y = 1(x-1)+1 = x$.

Q4. On calcule la différence entre g et sa tangente : d'après le développement limité donné, $g(x) - x = (x+1)^2 + o(x-1)^2 \geq 0$ au voisinage de $x = 1$. On en déduit que la courbe représentative de g est au-dessus de sa tangente autour du point d'abscisse 1.

Q5. On remarque que $g'(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0, on en déduit que la courbe admet une tangente verticale en $x = 0$.



Q6. Entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = 1$, la courbe d'équation $y = x^x$ est toujours d'ordonnée strictement inférieure à 1, d'où la majoration. Et on peut constater par exemple que, comme elle est au-dessus de sa tangente, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} > e^{-1}$.

II.B. Une approximation plus précise de $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$.

II.1. Un calcul d'intégrales.

Q7. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Q8. Soient $(n,k) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}$. Si $k = 0$, le résultat est évident (il ne s'agit même pas réellement d'un prolongement). Si $k > 0$, on peut écrire $x^n\ln(x)^k = (x^{n/k}\ln(x))^k$, et $\frac{n}{k} > 0$ donc, par croissance comparée, $x^{n/k}\ln(x)$ tend vers 0 en 0. On en déduit que la fonction est prolongeable par continuité et que son prolongement vaut 0.

Q9. Soient $(n,k) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et la fonction $x \mapsto \ln(x)^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Par intégration par parties,

$$\int_0^1 x^n(\ln(x))^k\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)^k\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{k}{x}\ln(x)^{k-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\ln(x)^k\,\mathrm{d}x$$

Q10. Si $n = k = 0$, alors les deux membres de l'égalité sont égaux à 1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$; montrons le résultat par récurrence sur k.

Si $k = 0$, alors les deux membres de l'égalité sont égaux à $\frac{1}{k+1}$.

Soit $k \in \mathbf{N}$, on suppose l'égalité vraie au rang k. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \ln^{k+1}(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^k(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{k+1}{n+1}\cdot\frac{(-1)^k\,k!}{(n+1)^{k+1}} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}},\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat.

II.2. Expression de $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une série.

Q11. Si $z = 0$, alors la convergence est évidente car le terme général est constamment nul. On suppose donc $z \neq 0$ et on applique le critère de d'Alembert :

$$\frac{|z^{n+1}|n!}{|z^n|(n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente.

Q12. Pour tout $x \in [0;1]$,

$$x^x = \exp(x\ln(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln(x))^n}{n!}$$

donc, par linéarité (infinie) de l'intégrale

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln(x))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(x\ln(x))^n}{n!}$$

Q13. Il suffit de substituer la formule de la question **Q10** avec $k = n$ dans la somme de la question précédente.

Q14. (a) Donner une valeur approchée à $\frac{1}{27}$ près, c'est calculer la somme partielle de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$) un rang tel que le reste soit inférieur à $\frac{1}{27}$. D'après la majoration donnée dans l'énoncé, $p = 1$ suffit ; en effet, $|R_1| \leq \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$. On a donc l'approximation

$$x^x \simeq \sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

(b) on applique le même principe : on calcule de manière incrémentale la somme partielle de la série jusqu'à un rang p vérifiant $\frac{1}{(p+2)^{p+2}} \leq h$, autrement dit $(p+2)^{p+2} \geq \frac{1}{h}$.

```
def approximation(h):
  S = 0
  n = 0
  A = 1/h
  while (n+2)**(n+2) < h:
    S = S + (-1)^n / ((n+1)**(n+1))
    n = n + 1
  return S
```

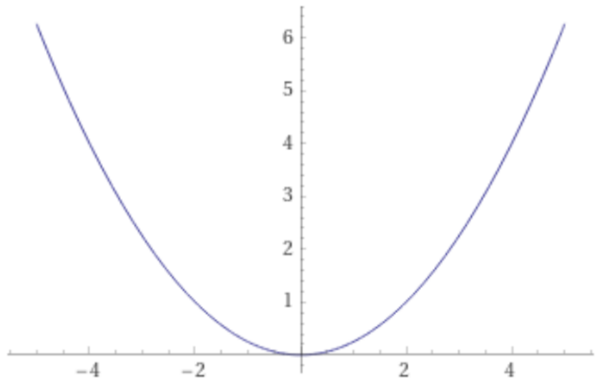
Problème III

III.A. Étude d'une parabole.

Q1. Dans la base orthonormée de l'énoncé, le vecteur $\overrightarrow{FP(t)}$ a pour coordonnées $(t, f(t) - \frac{p}{2})$ donc la distance entre F et $P(t)$ est $\sqrt{t^2 + (f(t) - \frac{p}{2})^2}$. Par ailleurs, la droite $\mathcal{D}$ étant verticale d'équation $y = -\frac{p}{2}$, sa distance avec le point $P(t)$ est $|f(t) + \frac{p}{2}|$. La condition d'équidistance entre $P(t)$ et F et $\mathcal{D}$ est donc

$$\sqrt{t^2 + \left(f(t) - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|f(t) + \frac{p}{2}\right|$$
$$\iff t^2 + \left(f(t) - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(f(t) + \frac{p}{2}\right)^2$$
$$\iff t^2 - pf(t) = pf(t) \iff f(t) = \frac{t^2}{2p}.$$

Q2. Il s'agit simplement de tracer la courbe représentative de la fonction $f\colon t \mapsto \frac{t^2}{2p}$:



Q3. La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse t est donnée par l'équation cartésienne $y = f'(t)(x - t) + f(t) = \frac{t}{p}(x - t) + \frac{t^2}{2p} = \frac{t}{p}x - \frac{t^2}{2p}$.

Q4. (a) Il faut comparer les distances $P(t)\,F$ et $P(t)\,H(t)$. On a clairement $P(t)\,H(t) = f(t) + \frac{p}{2} = \frac{t^2}{2p} + \frac{p}{2}$ (les points étant de même abscisse). Par ailleurs, la condition d'équidistance de **Q1** étant vérifiée par hypothèse, on a $P(t)\,F = d(P(t), \mathcal{D}) = f(t) + \frac{p}{2}$.

(b) On fait la moyenne des coordonnées des deux points : $I(\frac{t}{2}; 0)$.

(c) Lorsque t parcourt $\mathbf{R}$, $I(t)$ décrit tout l'axe des abscisses.

Q5. (a) Les droites $(P(t)\,I(t))$ et $\mathcal{T}(t)$ ont le point $P(t)$ en commun. Reste à voir qu'elles sont parallèles. Un vecteur directeur de $(P(t)\,I(t))$ est $\overrightarrow{P(t)\,I(t)} = (-\frac{t}{2}; -\frac{t^2}{2p})$, tandis qu'un vecteur directeur de $\mathcal{T}(t)$ est $P'(t) = (1, \frac{t}{p})$. On constate que ces deux vecteurs sont colinéaires (l'un est égal à $\frac{t}{2}$ fois l'autre), les droites sont donc parallèles, donc égales.

(b) Dans le triangle de sommets $P(t)$, F, $H(t)$, la droite $\mathcal{T}(t)$ est donc égale à la droite joignant le sommet principal $P(t)$ avec le milieu $I(t)$ du côté opposé. C'est, par définition, la médiatrice de $[F\,H(t)]$; le triangle étant isocèle en $P(t)$, cette droite se confond avec la hauteur issue de $P(t)$.

Q6. Notons $\mathcal{N}$ la droite recherchée. La droite $\mathcal{T}(t)$ admet comme vecteur directeur $(1, \frac{t}{p})$. Celui-ci est donc un vecteur normal de $\mathcal{N}$. Elle admet donc une équation cartésienne de la forme $x + \frac{t}{p}y + c = 0$. On souhaite de plus que cette droite passe par l'origine du repère, on a donc nécessairement $c = 0$. D'où $\mathcal{N}\colon x + \frac{t}{p}y = 0$.

La projection de O sur $\mathcal{T}(t)$ est le point d'intersection de $\mathcal{T}(t)$ et $\mathcal{N}$. On résout le système correspondant :

$$\begin{cases} y = \frac{t}{p}x - \frac{t^2}{2p} \\ x + \frac{t}{p}y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{t^3}{2(p^2+t^2)} \\ y = \frac{-pt^2}{2(p^2+t^2)} \end{cases}$$

III.B. **Étude de la podaire de $\mathcal{P}$ par rapport à son sommet O.**

Q7. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$x'(t) = \frac{6t^2(t^2+p^2) - 4t^4}{4(t^2+p^2)^2} = \frac{t^2(t^2+3p^2)}{2(t^2+p^2)^2} \quad \text{et}$$

$$y'(t) = \frac{-4pt(t^2+p^2) + 4pt^3}{4(t^2+p^2)^2} = -\frac{p^3 t}{(t^2+p^2)}$$

Q8. Les dénominateurs trouvés aux questions précédentes sont toujours strictement positifs, les dérivées sont donc du signe des numérateurs, soient positive pour x' avec un unique zéro pour $t = 0$, et du signe opposé au signe de t pour y. D'où :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$x(t)$	$\nearrow$		$\nearrow$
$y(t)$	$\nearrow$		$\searrow$

Q9. (a) La pente de la droite est donnée par

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = -\frac{pt^2}{t^3} = -\frac{p}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty.$$

(b) La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(0)$ est la droite limite des sécantes calculées à la question précédente, elle est donc verticale. Comme elle passe par le point $M(0) = (0,0)$, c'est donc la droite d'équation $x = 0$.

Q10.