Samedi 21 janvier 2023 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Problème I

On note $\mathcal{V}_d^2$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes X, définies sur un espace probabilisé Ω muni d'une probabilité $\mathbf{P}$ et telles que $\mathbf{E}(X^2)$ existe. Lorsqu'une variable aléatoire réelle discrète X appartient à $\mathcal{V}_d^2$, on dit alors que X *admet un moment d'ordre 2.*

Partie I. Étude de l'ensemble des variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.

I.1. Exemple simple. Soit V une variable aléatoire sur Ω suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

Q1. Rappeler la loi de Bernoulli de paramètre p.

Q2. Montrer que V appartient à $\mathcal{V}_d^2$.

I.2. Cadre général. Soient X et Y deux variables aléatoires de $\mathcal{V}_d^2$ ayant respectivement pour ensembles images $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ et $Y(\Omega) = \{y_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ avec, pour tous entiers i et j, x_i et y_j des nombres réels. On note :

$$\forall\, i, j \in \mathbf{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = r_{ij}\,; \\ \mathbf{P}([X = x_i]) = p_i\,; \\ \mathbf{P}([Y = y_j]) = q_j. \end{array} \right.$$

Q3. À quelle(s) condition(s) sur X et Y a-t-on $r_{ij} = p_i \times q_j$ pour tous $i, j \in \mathbf{N}$?

Q4. Exprimer $\mathbf{E}(X^2)$ en fonction des p_i et des x_i ; proposer une formulation équivalente pour $\mathbf{E}(Y^2)$.

Q5. Montrer que, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $p_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} r_{ij}$. En déduire que $\mathbf{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} r_{ij} x_i^2$.

On montre de la même manière que $\mathbf{E}(Y^2) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} r_{ij} y_i^2$

Q6. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Q7. Pour cette question, on admettra le résultat suivant :

> Si Z et T sont deux variables aléatoires réelles telles que Z est d'espérance finie et vérifiant $|T(\omega| \leq Z(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors T est d'espérance finie et $\mathbf{E}(T) \leq \mathbf{E}(Z)$.

Montrer que l'espérance de la variable produit XY existe et que

$$\mathbf{E}(XY) \leq \frac{1}{2}(\mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(Y^2)).$$

Q8. À l'aide de la question précédente, montrer que $\mathcal{V}_d^2$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω.

I.3. Artifice de calcul :utilisation de la loi certaine. Sur l'espace Ω muni de la probabilité $\mathbf{P}$, on considère Z une variable aléatoire certaine égale à 1.

Q9. Donner l'ensemble image de Z et sa loi.

Q10. Calculer $\mathbf{E}(Z^2)$ et en déduire que Z appartient à $\mathcal{V}_d^2$.

Q11. Déduire des questions **Q7** et **Q10** que si $X \in \mathcal{V}_d^2$, alors X admet une espérance et que

$$\mathbf{E}(X) \leq \frac{1}{2}(1 + \mathbf{E}(X^2)).$$

Q12. Dans le cas de deux variables aléatoires *finies* X et Y, on rappelle que la *covariance* de X et Y est définie par $\text{cov}(X,Y) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\right)$. Montrer que :

$$\text{cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y). \tag{1}$$

Q13. Pour $X, Y \in \mathcal{V}_d^2$, on définit, si elle existe, la covariance de X et Y par la formule (1). Déduire des questions précédentes que, si $X, Y \in \mathcal{V}_d^2$, alors X et Y admettent une variance et que leur covariance $\text{cov}(X,Y)$ existe.

Partie II. **Étude de la matrice de covariance.** Soient $V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{V}_d^2$. On définit la matrice de covariance des variables aléatoires V_1, V_2 et V_3 comme la matrice carrée d'ordre 3 $K = (k_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ où, pour tous $i, j \in [\![1;3]\!]$, $k_{ij} = \text{cov}(V_i, V_j)$.

II.1. Étude d'un exemple. On suppose, *uniquement dans cette sous-partie*, que les trois variables aléatoires V_1, V_2 et V_3 sont à valeurs dans $\{0;1\}$. On suppose également qu'il existe $p_1, p_2, p_3 \in]0;1[$ tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et

$$\mathbf{P}([V_1 = i] \cap [V_2 = j] \cap [V_3 = k]) = \begin{cases} p_1 & \text{si } j = k = 1,\ i = 0; \\ p_2 & \text{si } i = k = 1,\ j = 0; \\ p_3 & \text{si } i = j = 1,\ k = 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Q14. Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des variables de Bernoulli respectivement de paramètres $1 - p_1$, $1 - p_2$ et $1 - p_3$.

Q15. On pose $S = V_1 + V_2 + V_3$. Calculer $\mathbf{P}(S = 2)$ et en déduire la variance de S.

Q16. Montrer que $\text{cov}(V_1, V_2) = -p_1p_2$ et $\mathbf{V}(V_1) = p_1(1 - p_1)$.

Q17. Vérifier que la matrice K est égale à

$$K = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & -p_1p_3 \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) & -p_2p_3 \\ -p_1p_3 & -p_2p_3 & p_3(1-p_3) \end{pmatrix}$$

Q18. Montrer que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice K associé à la valeur propre 0.

Q19. Déterminer le rang de K puis son noyau.

Q20. On suppose de plus que $p_2 = p_3 = p$. Exprimer K uniquement en fonction de p, puis montrer que p est une valeur propre de K ; préciser la dimension du sous-espace propre.

Q21. Toujours dans le cas où $p_2 = p_3 = p$ et en utilisant la trace de K, déterminer toutes les valeurs propres de K et donner son polynôme caractéristique.

II.2. Retour au cas général. On se place maintenant dans le cas général ; V_1, V_2 et V_3 sont trois variables aléatoires discrètes de $\mathcal{V}_d^2$ quelconques. On rappelle que la matrice K est la matrice carrée d'ordre 3 dont le coefficient placé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est la covariance $\mathrm{cov}(V_i, V_j)$ (dont la définition a été donnée à la question **Q12**).

Q22. Montrer que K est une matrice symétrique. On admet qu'on peut en déduire qu'elle est diagonalisable.

Q23. En calculant la variance de la variable aléatoire $W = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$, montrer que, pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, on a :

$$\sum_{1\leq i,j\leq 3} x_i x_j \mathrm{cov}(V_i, V_j) \geq 0. \tag{3}$$

Q24. Montrer que la relation (3) peut se réécrire sous la forme :

$$\forall X \in \mathbf{R}^3 \quad X^T K X \geq 0.$$

En déduire que les valeurs propres de K sont positives ou nulles.

Problème II

Étant donné un réel μ, on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0 \tag{E_μ}$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0; 1[$.

Partie I. Résolution dans le cas où $\mu = 0$. Dans cette partie, on suppose $\mu = 0$. On cherche donc à résoudre sur $]0; 1[$ l'équation

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' = 0 \tag{E_0}$$

Q1. Soit $f : x \mapsto \arcsin(2x - 1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0; 1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0; 1[$, et que :

$$\forall x \in]0; 1[\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Q2. Montrer que toute fonction constante sur $]0; 1[$ est solution de (E_0).

Q3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$, $\dfrac{16x - 8}{16(x^2 - x)} = \dfrac{1/2}{x} + \dfrac{1/2}{x - 1}$.

Q4. On pose $z = y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à :

$$z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}\right) z = 0. \tag{E^*}$$

Q5. Résoudre (E^*) sur $]0; 1[$.

Q6. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0; 1[$.

Partie II. **Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$.** On se place dans le cas où $\mu \neq 0$. Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall\, x \in \,]-R; R[\quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q7. Justifier que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ensemble que vous préciserez.

Q8. Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big((16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1} \Big) x^n = 0.$$

On suppose dorénavant que y est solution de (E_μ).

Q9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$a_n = \frac{a_0}{4^n (2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)$$

Q10. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.

Q11. Si $a_0 \neq 0$ et s'il existe $p \in \mathbf{N}^\star$ tel que $\mu = 16p^2$, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.

Q12. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p, préciser le rayon de convergence de y.

Partie III. **Étude d'une solution particulière.** On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$. Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle $]-R; R[$ par la relation :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est définie par la formule de la question **Q9** et R est le rayon de convergence obtenu à la question **Q12**.

Q13. À partir de la relation de la question **Q9**, montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$a_n = \frac{1}{4^n (2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1).$$

Q14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$(4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1).$$

Q15. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$:

$$a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n} \times ((2n)!)^2 \times (4n-1)}.$$

Q16. En admettant la formule de Stirling $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$, montrer que $a_n \sim \dfrac{-1}{4\sqrt{2\pi} n^{3/2}}$.

Q17. Rappeler le rayon de convergence de ϕ et préciser la convergence de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Q18. En déduire que l'équation (E_1) admet une solution non nulle f sur l'intervalle $]0; 1[$.

(les deux problèmes d'après CCINP 2018)