

PROBLÈME I

Partie I. Étude de l'ensemble des variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.

Q1. $V(\Omega) = \{0; 1\}$ avec $\mathbf{P}(V = 1) = p$.

Q2. V est une variable aléatoire sur un univers fini, en particulier V^2 est bornée donc d'espérance finie.

Q3. Cela revient à dire que X et Y sont indépendantes.

Q4. D'après la formule de transfert, $\mathbf{E}(X^2) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i x_i^2$. De même, $\mathbf{E}(Y^2) = \sum_{i=0}^{+\infty} q_i y_i^2$.

Q5. Les événements $[Y = y_j]_{j \in \mathbf{N}}$ constituent une partition de l'univers. On en déduit que

$$p_i = \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} r_{ij}.$$

En injectant cette expression dans la formule obtenue à la question précédente, on en déduit le résultat demandé.

Q6. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. On a $0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|$, d'où l'inégalité recherchée.

Q7. D'après la question précédente, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $|(XY)(\omega)| \leq \frac{1}{2}(X^2(\omega) + Y^2(\omega))$. Or, par hypothèse, X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, donc $\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ l'est également. On est précisément dans la situation du lemme proposé dans l'énoncé, avec $T = XY$ et $Z = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$. On en déduit donc que XY est d'espérance finie et que $\mathbf{E}(XY) \leq \mathbf{E}(\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(Y^2))$.

Q8. Il est clair que la variable aléatoire nulle appartient à $\mathcal{V}_d^2$, il suffit donc de montrer que celui-ci est stable par combinaisons linéaires. Soient donc $X, Y \in \mathcal{V}_d^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $(X + \lambda Y)^2 = X^2 + \lambda^2 Y^2 + 2\lambda XY$. On sait par hypothèse que $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(Y^2)$ existent, et d'après la question précédente $\mathbf{E}(XY)$ existe également. On en déduit que $\mathbf{E}((X + \lambda Y)^2)$ existe, autrement dit $X + \lambda Y \in \mathcal{V}_d^2$.

Q9. On a $Z(\Omega) = 1$ et $\mathbf{P}(Z = 1) = 1$.

Q10. La variable aléatoire Z^2 est aussi certaine égale à 1, on a donc évidemment $\mathbf{E}(Z^2) = 1$ et $Z^2 \in \mathcal{V}_d^2$.

Q11. Soit $X \in \mathcal{V}_d^2$. On peut écrire $X = XZ$ et, comme X et Z appartiennent à $\mathcal{V}_d^2$, d'après **Q7**, on en déduit donc que X est d'espérance finie, avec $\mathbf{E}(X) \leq \frac{1}{2}(\mathbf{E}(Z^2) + \mathbf{E}(X^2)) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{E}(X^2))$.

Q12. On a

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))) = \mathbf{E}(XY - \mathbf{E}(Y)X - \mathbf{E}(X)Y + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)) \\ &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) \text{ par linéarité} \\ &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y). \end{aligned}$$

Q13. D'après **Q11**, si $X \in \mathcal{V}_d^2$, alors X admet une espérance et sa variance $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ existe donc. De même pour Y . D'après **Q7**, XY admet également une espérance, ce qui démontre que la covariance $\text{cov}(X, Y)$ existe.

Partie II. Étude de la matrice de covariance.

- Q14.** V_1, V_2 et V_3 sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ par définition. De plus, $\mathbf{P}(V_1 = 1) = \sum_{(j,k) \in \{0,1\}^2} \mathbf{P}([V_1 = 1] \cap [V_2 = j] \cap [V_3 = k]) = p_2 + p_3 = 1 - p_1$. La variable V_1 est donc de Bernoulli de paramètre $1 - p_1$, et de même pour V_2 et V_3 .
- Q15.** Les triplets (i, j, k) pour lesquels $i + j + k = 2$ sont $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$. La probabilité d'avoir $S = 2$ est donc la somme des probabilités de ces trois triplets, soit $\mathbf{P}(S = 2) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Autrement dit, S suit une loi certaine égale à 2 ; on a donc $\mathbf{E}(S) = 2$ et $\mathbf{V}(S) = 0$.
- Q16.** V_1 étant de Bernoulli de paramètre $1 - p_1$, V_1^2 l'est également. On a donc $\mathbf{V}(V_1) = \mathbf{E}(V_1^2) - \mathbf{E}(V_1)^2 = (1 - p_1) - (1 - p_1)^2 = p_1(1 - p_1)$. Par ailleurs, $\text{cov}(V_1, V_2) = \mathbf{E}(V_1 V_2) - \mathbf{E}(V_1)\mathbf{E}(V_2)$. On remarque que $V_1 V_2$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(V_1 V_2 = 1) = \mathbf{P}([V_1 = 1] \cap [V_2 = 1]) = p_3$ donc $\mathbf{E}(V_1 V_2) = p_3$. On a donc $\text{cov}(V_1, V_2) = p_3 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_3 - 1 + p_1 + p_2 - p_1 p_2 = -p_1 p_2$ (car $p_1 + p_2 + p_3 = 1$).
- Q17.** Par définition de la matrice de covariance, les coefficients diagonaux doivent être égaux à $\text{cov}(V_i, V_i) = \mathbf{V}(V_i)$; on retrouve bien les formules obtenues aux questions précédentes.
- Q18.** On calcule $K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La première ligne du résultat est $p_1(1 - p_1) - p_1 p_2 - p_1 p_3 = p_1 - p_1(p_1 + p_2 + p_3) = 0$ (toujours car $p_1 + p_2 + p_3 = 1$). De même pour les deux autres lignes. On en déduit que $K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, autrement dit ce vecteur (évidemment non nul) est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.
- Q19.** La matrice K est carrée de taille 3 mais non inversible (d'après la question précédente), donc de rang strictement inférieur à 3. Par ailleurs, montrons que la famille de $\mathbf{R}^3$ composée des deux premières colonnes est libre : s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$, on a donc (comme $p_1, p_2, p_3 \neq 0$ par hypothèse)

$$\begin{cases} \lambda p_1(1 - p_1) - \mu p_1 p_2 = 0 \\ -\lambda p_1 p_2 + \mu p_2(1 - p_2) = 0 \\ -\lambda p_1 p_3 - \mu p_2 p_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1(\lambda - \lambda p_1 - \mu p_2) = 0 \\ p_2(\mu - \lambda p_1 - \mu p_2) = 0 \\ \lambda p_1 + \mu p_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0$$

On en déduit que la matrice K est de rang au moins 2, donc de rang 2. D'après le théorème du rang, on en déduit que son noyau est de dimension 1. Or, d'après la question précédente, ce noyau contient $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (qui est de dimension 1) ; on en déduit que $\text{Ker } K = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Q20.** Dans ce cas, remarquons que $p_1 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 2p$. On a alors

$$K = \begin{pmatrix} 2p(1 - 2p) & -p(1 - 2p) & -p(1 - 2p) \\ -p(1 - 2p) & p(1 - p) & -p^2 \\ -p(1 - 2p) & -p^2 & p(1 - p) \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} KX = pX &\iff \begin{cases} 2p(1 - 2p)x - p(1 - 2p)y - p(1 - 2p)z = px \\ -p(1 - 2p)x + p(1 - p)y - p^2 z = py \\ -p(1 - 2p)x - p^2 y + p(1 - p)z = pz \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (1 - 4p)x - (1 - 2p)y - (1 - 2p)z = 0 \\ -(1 - 2p)x - py - pz = 0 \\ -(1 - 2p)x - py - pz = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \left((1 - 4p) + \frac{(1 - 2p)^2}{p} \right) x = 0 \\ y + z = -\frac{1 - 2p}{p} x \end{cases} \end{aligned}$$

On étudie le coefficient devant x dans la première équation :

$$(1-4p) + \frac{(1-2p)^2}{p} = 0 \iff \frac{p-4p^2+1-4p+4p^2}{p} = 0 \iff p = \frac{1}{3}$$

Ainsi, deux cas différents se présentent :

- si $p \neq \frac{1}{3}$, la première équation du système donne $x = 0$ et on a donc $KX = pX \iff x = y + z = 0$; autrement dit p est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 1;
- si $p = \frac{1}{3}$, la première équation est tautologiquement vraie; on a donc $KX = pX \iff y + z = -\frac{1-2p}{p}x$, autrement dit p est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 2.

- Q21.**
- Si $p = \frac{1}{3}$, on sait d'après les questions précédentes que 0 est valeur propre simple et $p = \frac{1}{3}$ valeur propre double. On a donc $\text{Sp}(K) = \{0, p\}$ et $\chi_K = X(X-p)^2$.
 - Si $p \neq \frac{1}{3}$, on ne connaît que deux valeurs propres sur trois. On sait que la trace de K est égale à la somme de ses valeurs propres complexes (avec multiplicité), la valeur propre manquante est donc $\text{tr}(K) - (0+p) = 3p(1-2p)$. On a donc $\text{Sp}(K) = \{0, p, 3p(1-2p)\}$ et $\chi_K = X(X-p)(X-3p(1-2p))$.

On peut remarquer que la formule $3p(1-2p)$ redonne $\frac{1}{3}$ si $p = \frac{1}{3}$, l'expression $X(X-p)(X-3p(1-2p))$ pour le polynôme caractéristique est donc valable dans tous les cas.

- Q22.** Pour tous $i, j \in \{1, 3\}$, on a $\text{Cov}(V_i, V_j) = \text{Cov}(V_j, V_i)$. La matrice K est donc symétrique.

- Q23.** On développe la variance de W :

$$\mathbf{V}(W) = \sum_{(i,j) \in \{1,3\}^2} x_i x_j \text{Cov}(V_i, V_j).$$

Or une variance est toujours positive, on en déduit l'inégalité (3).

- Q24.** On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Alors

$$\begin{aligned} X^T K X &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Cov}(V_1, V_1) & \text{Cov}(V_1, V_2) & \text{Cov}(V_1, V_3) \\ \text{Cov}(V_2, V_1) & \text{Cov}(V_2, V_2) & \text{Cov}(V_2, V_3) \\ \text{Cov}(V_3, V_1) & \text{Cov}(V_3, V_2) & \text{Cov}(V_3, V_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_i x_j \text{Cov}(V_i, V_j). \end{aligned}$$

Ainsi (3) se réécrit bien $X^T K X \geq 0$.

Soit λ une valeur propre de K et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $X^T K X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$. L'inégalité (3) implique donc $\lambda \|X\|^2 \geq 0$, d'où $\lambda \geq 0$.

PROBLÈME II

Partie I. Résolution dans le cas où $\mu = 0$.

- Q1.** La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] -1; 1[$. Or, pour tout $x \in [0; 1]$, on a $2x - 1 \in [-1; 1]$. La fonction f est donc bien définie sur $[0; 1]$. Elle est continue sur cet intervalle par composition; enfin, pour tout $x \in]0; 1[$, $2x - 1 \in] -1; 1[$, donc f est dérivable sur $]0; 1[$ par composition. Pour tout $x \in]0; 1[$, on a donc

$$f'(x) = 2 \arcsin'(2x - 1) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2 + 4x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}.$$

- Q2.** Si g est constante sur $]0; 1[$, alors, pour tout $x \in]0; 1[$, on a $g''(x) = g'(x) = 0$, donc $16(x^2 - x)g''(x) + (16x - 8)g'(x) = 0$; autrement dit, g est solution de (E_0) .

Q3. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$. On réduit le membre de droite au même dénominateur, puis on multiplie le numérateur et le dénominateur par 8 :

$$\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1+x}{x(x-1)} = \frac{2x-1}{2(x^2-x)} = \frac{16x-8}{16(x^2-x)}.$$

Q4. Si $z = y'$, alors $y'' = z'$. On se place sur l'intervalle $]0; 1[$, donc $x^2 - x \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} (E_0) &\iff 16(x^2 - x)z' + (16x - 8)z = 0 \iff z' + \frac{16x - 8}{16(x^2 - x)} = 0 \\ &\iff z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}\right)z = 0 \quad \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Q5. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, les solutions sont donc les fonctions $z \mapsto \lambda e^{-A(x)}$; où λ parcourt $\mathbf{R}$ et A désigne une primitive de $\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}$ sur $]0; 1[$. La fonction $A: x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x)$ convient. On a alors, pour tout $x \in]0; 1[$, $e^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{2} \ln x} e^{-\frac{1}{2} \ln(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Les solutions de (E^*) sont donc les fonctions

$$z: t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ pour tout } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Q6. D'après les questions (4) et (5), y est solution de (E_0) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $y'(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x(1-x)}}$. Les solutions de (E_0) sont donc toutes les primitives des fonctions $t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x(1-x)}}$. D'après la question (1), on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_0) est $\mathcal{S} = \{y: x \mapsto \lambda \arcsin(2x - 1) + \mu \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$.

Partie II. Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$.

Q7. La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence : f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R; R[$.

Q8. Pour tout $x \in] -R; R[$, on a $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. Alors y vérifie (E_μ) si et seulement si

$$\begin{aligned} 16(x^2 - x) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (16x - 8) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \mu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\ \iff \sum_{n=2}^{+\infty} 16n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} 16n(n-1) a_n x^{n-1} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} 16n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 8n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \mu a_n x^n = 0. \end{aligned}$$

On effectue un décalage d'indice dans toutes ces sommes ; on remarque qu'on peut faire démarrer toutes les sommes à l'indice $n = 0$ car cela revient à faire apparaître des termes nuls dans les sommes démarrant à des indices supérieurs : ainsi y vérifie (E_μ) si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (16n(n-1) a_n - 16(n+1) n a_{n+1} + 16n a_n - 8(n+1) a_{n+1} - \mu a_n) x^n &= 0 \\ \iff \sum_{n=0}^{+\infty} ((16n^2 - \mu) a_n - (n+1)(16n+8) a_{n+1}) x^n &= 0 \\ \iff \sum_{n=0}^{+\infty} ((16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1}) x^n &= 0. \end{aligned}$$

Q9. La fonction y étant solution de $(E\mu)$, la condition établie à la question précédente est vraie. Par unicité de la décomposition en série entière de la fonction nulle, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1} = 0$, donc

$$a_{n+1} = \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} a_n. \quad (\star)$$

Montrons l'identité recherchée par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.

Pour $n = 1$, en appliquant l'égalité $(\star)$ à $n = 0$, on obtient, $a_1 = a_0 \times \frac{-\mu}{8}$, ce qui correspond bien à l'identité souhaitée.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose la proposition vraie au rang n . D'après $(\star)$, on a donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} a_n \\ &= \frac{16n^2 - \mu}{8(n+1)(2n+1)} \frac{a_0}{4^n(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu) \quad (\text{HR}) \\ &= \frac{a_0}{4(2n+2)(2n+1)4^n(2n)!} \prod_{k=0}^n (16k^2 - \mu) \\ &= \frac{a_0}{4^{n+1}(2n+2)!} \prod_{k=0}^n (16k^2 - \mu). \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$; par principe de récurrence, l'égalité est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Q10. Si $a_0 = 0$, alors d'après la question précédente, on a $a_n = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc y est la fonction nulle, de rayon de convergence infini.

Q11. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$, alors le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)$ est nul si et seulement si $p \leq n-1$, autrement dit si et seulement si $n \geq p+1$. Ainsi, on a $a_n = 0$ si et seulement si $n \geq p+1$. On peut donc écrire $y = \sum_{n=0}^p a_n x^n$, il s'agit donc d'une fonction polynomiale de degré p .

Q12. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p , on peut utiliser le critère de d'Alembert car les coefficients a_n ne s'annulent pas : d'après $(\star)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]-R; R[$,

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|16n^2 - \mu|}{8(n+1)(2n+1)} |x| \sim \frac{16n^2}{16n^2} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

D'après le critère de d'Alembert, $\sum a_n x^n$ converge absolument dès que $|x| < 1$ et diverge grossièrement dès que $|x| > 1$. C'est donc une série entière de rayon 1.

Partie III. Étude d'une solution particulière.

Q13. Comme $\mu = 1$ et $a_0 = 1$, la formule de la question (9) se réécrit :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = \frac{1}{4^n(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - 1) = \frac{1}{4^n(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1).$$

En effet, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $16k^2 - 1 = (4k)^2 - 1^2 = (4k-1)(4k+1)$.

Q14. On écrit la factorielle de $4n$ en regroupant les facteurs par « paquets » de 4 consécutifs :

$$\begin{aligned}
(4k)! &= \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4) \\
&= 2^n 4^n \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1)(2k+1)(4k+3)(k+1) \\
&= 8^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1)(4k+3) \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 8^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1)(4k+3) \frac{(2n)!}{2^n n!} \\
&= 4^n (2n)! \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1) \prod_{k'=1}^n (4k'-1) = 2^{2n} (2n)! \frac{4n-1}{-1} \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1)(4k-1) \\
&= -2^{2n} (2n)! (4n-1) \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1)(4k-1).
\end{aligned}$$

Q15. On reprend la formule de la question (13) en y remplaçant le produit $\prod (4k-1)(4k+1)$ grâce à la formule de la question précédente :

$$a_n = \frac{1}{4^n (2n)!} \times \frac{(4n)!}{-2^{2n} (2n)! (4n-1)} = -\frac{(4n)!}{4^{2n} ((2n)!)^2 (4n-1)}$$

Q16. On utilise la formule de Stirling pour donner des équivalents de $(4n)!$ et $(2n)!$:

$$(4n)! \sim e^{-4n} 4^{4n} n^{4n} \sqrt{8\pi n} \quad \text{et} \quad (2n)! \sim e^{-2n} 2^{2n} n^{2n} \sqrt{4\pi n},$$

donc

$$a_n \sim -\frac{e^{-4n} 4^{4n} n^{4n} \sqrt{8\pi n}}{4^{2n} (e^{-2n} 2^{2n} n^{2n} \sqrt{4\pi n})^2 4n} \sim \frac{-1}{4\sqrt{2\pi n^{3/2}}}.$$

Q17. On rappelle que ϕ est de rayon 1. D'après la question précédente, $a_n = o(n^{-5/4})$, or $\sum n^{-5/4}$ est absolument convergente, donc $\sum a_n$ est absolument convergente, donc convergente. Ceci montre que la série définissant ϕ converge pour $x = 1$. Par ailleurs, la série $\sum (-1)^n a_n$ est aussi absolument convergente, donc convergente ; la série définissant ϕ converge donc pour $x = -1$.

Q18. D'après les questions précédentes, la série entière ϕ est convergente donc définie sur $[-1; 1]$ et non nulle. De plus, son terme général vérifie la condition établie à la question (8). La restriction f de ϕ à l'intervalle $]0; 1[$ est également non nulle et vérifie la même condition ; c'est donc une solution non nulle de (E_1) sur $]0; 1[$.