Samedi 18 février 2023 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

PROBLÈME I. VARIABLES ALÉATOIRES À VALEURS DANS $\{-1; 1\}$

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$. Pour X une variable aléatoire sur Ω , on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.

On dit qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathbf{P})$ suit une *loi de Rademacher* lorsque :

$$X(\Omega) = \{-1; 1\}; \quad \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}; \quad \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Partie I. Marche aléatoire sur un carré. Dans cette partie, le plan usuel $\mathbf{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé direct.

I.1. Rotations du plan. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On rappelle que la matrice de rotation d'angle θ est donnée par :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Notons f_θ l'application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ canoniquement associée à cette matrice de rotation.

Q1. Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, calculer $f_\theta(x, y)$.

À partir de cette question, on identifie le plan complexe $\mathbf{C}$ au plan usuel $\mathbf{R}^2$. Ainsi, à chaque point (x, y) dans $\mathbf{R}^2$ est associé une unique affixe $x + iy$ dans $\mathbf{C}$.

Q2. Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que l'affixe correspondante à $f_\theta(x, y)$ s'écrit $e^{i\theta}(x + iy)$.

Pour la suite de cette partie, on admet que la rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine est représentée par l'application complexe $r_\theta: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie pour tout $z \in \mathbf{C}$ par $r_\theta(z) = e^{i\theta}z$.

I.2. Racines n -èmes de l'unité. Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une racine n -ème de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$. On note, pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\omega_k = e^{2ki\pi/n}$.

Q3. Montrer que $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ sont précisément les racines n -èmes de l'unité.

Q4. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $r_{2\pi/n}(\omega_k) = \omega_{k+1}$.

Q5. Dans le cas où $n = 4$, donner la forme algébrique de $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ et ω_3 .

I.3. Marche aléatoire sur un carré. Dans cette sous-partie, le plan est assimilé à l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$. On s'intéresse à une boussole centrée en 0 dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1); Nord (d'affixe i); Ouest (d'affixe -1); Sud (d'affixe $-i$).

On suppose que, lorsque l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $\frac{1}{2}$, que ce soit dans le sens trigonométrique ou dans le sens inverse. D'une étape sur l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place ni changer pour le point diamétralement opposé.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de l'aiguille de la boussole à l'étape n . Ainsi, A_n prend ses valeurs dans $\{1; i; -1; -i\}$.

On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables A_n .

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$, et -1 dans le sens inverse. De ce fait, D_n suit une loi de Rademacher.

Q6. Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que $A_{n+1} = e^{i\pi D_n/2} A_n$.

Q7. Soit $n \in \mathbf{N}$. En utilisant la variable D_n et le fait que $\{(A_n = 1); (A_n = i); (A_n = -1); (A_n = -i)\}$ est un système complet d'événements de Ω , justifier que :

$$\mathbf{P}(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(A_n = i) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(A_n = -i).$$

Q8. Soit $n \in \mathbf{N}$. Sans justifier, exprimer avec des formules analogues $\mathbf{P}(A_{n+1} = i)$, $\mathbf{P}(A_{n+1} = -1)$ et $\mathbf{P}(A_{n+1} = -i)$.

On note la matrice $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q9. La matrice M est-elle inversible ?

Q10. Montrer que -1 est valeur propre de M .

Q11. Montrer que le vecteur $(1; 1; 1; 1)$ est vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Q12. Déterminer une base de l'image de M . En utilisant les dimensions des sous-espaces propres, démontrer que M est diagonalisable.

Q13. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère la matrice colonne :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(A_n = 1) \\ \mathbf{P}(A_n = i) \\ \mathbf{P}(A_n = -1) \\ \mathbf{P}(A_n = -i) \end{pmatrix}.$$

On suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique l'Est, c'est-à-dire $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sans mener les calculs, expliquer la démarche pour obtenir une expression en fonction de $n \in \mathbf{N}$ des probabilités $\mathbf{P}(A_n = 1)$, $\mathbf{P}(A_n = i)$, $\mathbf{P}(A_n = -1)$ et $\mathbf{P}(A_n = -i)$.

Partie II. Orthonormalité des lois de Rademacher. Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbf{N}^*$.

II.1. Un produit scalaire. On note $V_f(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un nombre fini de valeurs :

$$V_f(\Omega) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \mid X(\Omega) \text{ est fini}\}.$$

Q14. Montrer que si X suit une loi de Rademacher, alors $X \in V_f(\Omega)$ et $\mathbf{E}(X) = 0$.

Q15. Montrer que $\mathbf{V}_f(\omega)$ est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

On définit l'application Φ sur $V_f(\Omega) \times V_f(\omega)$ par :

$$\Phi(X, Y) = \mathbf{E}(XY),$$

où $\mathbf{E}$ désigne l'espérance et (X, Y) est un couple dans $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$.

Q16. Montrer que l'application Φ est un produit scalaire sur $V_f(\Omega)$.

II.2. Orthonormalité et projection. On considère $X_1, \dots, X_n$ une suite de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Rademacher.

Q17. Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille orthonormale dans $V_f(\Omega)$ pour le produit scalaire Φ .

On garde dans cette dernière sous-partie les notations introduites ci-dessus. On note F le sous-espace vectoriel de $V_f(\Omega)$ engendré par $X_1, \dots, X_n$.

Q18. Déterminer la dimension de F .

Q19. Montrer que si $X \in V_f(\Omega)$ est indépendante de chacune des variables $X_1, \dots, X_n$, alors $X \in F^\perp$ (où $F^\perp$ désigne l'orthogonal de F pour le produit scalaire Φ).

Q20. Soit $X = \sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2}$. Déterminer la loi de X , puis la distance de X à F .

(d'après CCINP 2021)

PROBLÈME II. SÉRIES DE FOURIER ET ÉQUATION DE LA CHALEUR

Rappels. Si F est une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et périodique de période 2, alors les coefficients de Fourier trigonométriques de F , $(a_n(F))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n(F))_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont définis par :

$$a_0(F) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(t) dt; \quad a_n(F) = \int_{-1}^1 F(t) \cos(n\pi t) dt; \quad b_n(F) = \int_{-1}^1 F(t) \sin(n\pi t) dt.$$

Partie I. Propriétés des coefficients de Fourier. Dans toute cette partie, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, périodique de période 2. Sa dérivée est notée F' .

Q1. Montrer que si la fonction F est paire, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n(F) = 0$. Rappeler (sans démonstration) le résultat analogue si la fonction F est impaire.

Q2. Montrer que si la fonction F est paire, alors sa dérivée F' est impaire. On admet que, de même, si la fonction F est impaire, alors sa dérivée F' est paire

Q3. Montrer que :

$$\begin{cases} a_0(F') = 0; \\ \forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n(F') = n\pi b_n(F) \text{ et } b_n(F') = -n\pi a_n(F). \end{cases}$$

Pour les deux dernières égalités, on pourra effectuer une intégration par parties.

Q4. En déduire que les deux séries $\sum n^2(a_n(F))^2$ et $\sum n^2(b_n(F))^2$ sont convergentes.

Dans la suite de cette partie, on suppose que la fonction F est périodique de période 2, impaire et de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$. On note $F^{(3)}$ sa dérivée troisième.

Q5. Exprimer les coefficients de Fourier trigonométriques de $F^{(3)}$ en fonction de ceux de F .

Q6. En déduire la nature de la série $\sum n^6(b_n(F))^2$.

Q7. Pour deux réels quelconques a et b , montrer que $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Q8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n^2|b_n(F)| \leq \frac{1}{2} \left(n^6(b_n(F))^2 + \frac{1}{n^2} \right)$.

Q9. Quelle est la nature de la série $\sum n^2 b_n(F)$?

Partie II. Un problème de prolongement. On suppose dans cette partie que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

Q10. Montrer qu'il existe une unique fonction F impaire et périodique de période 2 vérifiant $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0; 1]$.

Q11. Décrire l'enchaînement des transformations géométriques qui permettent d'obtenir la courbe représentative de F à partir de celle de f .

Q12. À l'aide d'arguments géométriques, justifier que la courbe représentative de la fonction F admet des tangentes aux points d'abscisses 0, 1 et -1 . Déterminer les coefficients directeurs de ces trois tangentes.

On admet pour la suite du problème que si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0; 1]$ et vérifie $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$, alors la fonction F est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$.

Partie III. L'équation de la chaleur. On considère une barre rectiligne métallique de longueur 1 m. On suppose qu'au cours du temps la température de chacune de ses extrémités est maintenue à 0°C . On prend pour origine l'une des extrémités de la barre et on repère chaque point de la barre par son abscisse x (en mètre). On note $f(x)$ la température en degrés Celsius à l'instant $t = 0$ au point de la barre d'abscisse x . On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0; 1]$.

On note $\Delta = [0; +\infty[\times [0; 1[$. Pour $(t, x) \in \Delta$, on note $u(t, x)$ la température à l'instant t au point de la barre d'abscisse x . On admet que la fonction u vérifie l'équation de la chaleur :

$$\forall (t, x) \in \Delta \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x). \quad (1)$$

Les conditions spécifiées dans l'énoncé imposent en plus les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \forall t \in [0; +\infty[; \\ u(0, x) = f(x) & \forall x \in [0; 1]. \end{cases}$$

On cherche à déterminer les fonctions u solutions de l'équation (1) vérifiant de plus les conditions de régularité suivantes :

- pour tout $t \in [0; +\infty[$, la fonction $g_t: x \mapsto u(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0; 1]$;
- pour tout $x \in [0; 1]$, la fonction $h_x: t \mapsto u(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

Q13. Montrer que, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) = 0$.

Q14. Que peut-on en déduire pour les valeurs de $f''(0)$ et de $f''(1)$?

Q15. Justifier que f est prolongeable en une unique fonction F impaire, périodique de période 2 et de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$.

On suppose que u est une solution du problème et on fixe $t \in [0; +\infty[$.

Q16. Montrer que la fonction g_t est prolongeable en une unique fonction G_t , impaire, périodique de période 2 et de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$.

Q17. Montrer qu'il existe une suite $(\beta_n(t))_{n \in \mathbf{N}^*}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad G_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

Q18. Exprimer $\beta_n(0)$ à l'aide de la fonction F .

Q19. Justifier que la dérivée seconde de G_t est égale à la somme de sa série de Fourier et écrire cette somme.

Pour $(t, x) \in [0; +\infty[\times \mathbf{R}$, on note $U(t, x) = G_t(x)$. On admet que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction β_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$, que la série $\sum |\beta'_n(t)|$ converge et que

$$\forall (t, x) \in [0; +\infty[\times \mathbf{R} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_n(t) \sin(n\pi x).$$

Q20. En déduire que :

$$\forall (t, x) \in \Delta \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_n(t) \sin(n\pi x) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

On admet que cette égalité entraîne, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in [0; +\infty[$, l'égalité

$$\beta'_n(t) = -n^2 \pi^2 \beta_n(t).$$

Q21. Donner l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'(t) + n^2 \pi^2 y(t) = 0.$$

Q22. En déduire que la solution cherchée est définie par

$$\forall (t, x) \in \Delta \quad u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(F) e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

(d'après Centrale-Supélec 2021)