

PROBLÈME I. VARIABLES ALÉATOIRES À VALEURS DANS  $\{-1; 1\}$ 

**Q1.**  $f_\theta(x, y) = R_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$

**Q2.**  $e^{i\theta}(x + iy) = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = x \cos \theta - y \sin \theta + i(x \sin \theta + y \cos \theta).$  On reconnaît l'affixe correspondante au vecteur trouvé à la question précédente.

**Q3.** Soit  $z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}^*$ . On a :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \iff z = e^{2ik\pi/n}.$$

A priori, l'entier  $k$  peut parcourir  $\mathbf{Z}$  tout entier, mais on peut remarquer que  $e^{i2(k+n)\pi/n} = e^{i2k\pi/n}$ , autrement dit l'ensemble des résultats possibles est parcouru dès que  $k$  prend  $n$  valeurs consécutives, par exemple  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ; et on retrouve ainsi les nombres  $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ .

**Q4.** D'après **Q2**,  $r_{2\pi/n}(\omega_k) = e^{2i\pi/n} \cdot e^{2ik\pi/n} = e^{2i(k+1)\pi/n} = \omega_{k+1}$ .

**Q5.** On a  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = i$ ,  $\omega_2 = -1$  et  $\omega_3 = -i$ .

**Q6.** Si  $D_n = 1$ , la boussole a tourné dans le sens trigonométrique, autrement dit  $A_{n+1}$  est l'image de  $A_n$  par la rotation d'angle  $+\frac{\pi}{2}$  donc  $A_{n+1} = e^{i\pi/2}A_n$ ; de même, si  $D_n = -1$ , la rotation est d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  donc  $A_{n+1} = e^{-i\pi/2}A_n$ ; on a bien  $A_{n+1} = e^{i\pi D_n/2}A_n$  dans les deux cas.

**Q7.**  $\{(A_n = 1); (A_n = i); (A_n = -1); (A_n = -i)\}$  étant un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1} = 1) &= \mathbf{P}(A_{n+1} = 1 \cap A_n = 1) + \mathbf{P}(A_{n+1} = 1 \cap A_n = i) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_{n+1} = 1 \cap A_n = -1) + \mathbf{P}(A_{n+1} = 1 \cap A_n = -i) \\ &= 0 + \mathbf{P}(D_n = -1 \cap A_n = i) + 0 + \mathbf{P}(D_n = 1 \cap A_n = -i) \\ &= \mathbf{P}(D_n = -1) \cap \mathbf{P}(A_n = i) + \mathbf{P}(D_n = 1) \mathbf{P}(A_n = -i) \text{ car } D_n \text{ et } A_n \text{ indep.} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{P}(A_n = i) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(A_n = -i). \end{aligned}$$

**Q8.** De même,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1} = i) &= \frac{1}{2} \mathbf{P}(A_n = 1) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(A_n = -1) \\ \mathbf{P}(A_{n+1} = -1) &= \frac{1}{2} \mathbf{P}(A_n = i) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(A_n = -i) \\ \mathbf{P}(A_{n+1} = -i) &= \frac{1}{2} \mathbf{P}(A_n = 1) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(A_n = -1) \end{aligned}$$

**Q9.** La matrice  $M$  possède deux colonnes identiques, elle n'est donc pas inversible.

**Q10.** On résout  $MX = -X$ , avec  $X = (x, y, z, t)$  :

$$MX = -X \iff \begin{cases} 2x + y + t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ x + z + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = t \\ x = -y \end{cases}$$

Ainsi  $-1$  est valeur propre et le sous-espace propre associé est  $\text{Vect}(1, -1, 1, -1)$ .

**Q11.**

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ainsi le vecteur  $(1, 1, 1, 1)$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

**Q12.** On sait que la famille des vecteurs colonnes de  $M$  est une famille génératrice de son image. Évidemment, deux d'entre eux apparaissent deux fois, on peut donc les supprimer de la famille sans changer l'espace engendré. On a donc  $\text{Im } M = \text{Vect}((0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0))$ . Il est clair que la famille  $((0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0))$  est libre, c'est donc une base de  $\text{Im } M$ .

On vient de montrer que  $M$  est de rang 2. D'après le théorème du rang, on en déduit que  $\text{Ker } M$  est de dimension  $4 - 2 = 2$ . Autrement dit, le sous-espace propre de  $M$  associé à la valeur propre 0 est de dimension 2. D'après les questions **Q10** et **Q11**, la matrice  $M$  admet donc au moins trois sous-espaces propres dont la somme des dimensions est au moins  $1 + 1 + 2 = 4 = \dim \mathbf{R}^4$ . Elle est donc diagonalisable.

**Q13.** D'après **Q12**, on peut trouver deux matrices  $D$  diagonale et  $P$  inversible telles que  $M = PDP^{-1}$ . D'après les questions **Q7** et **Q8**, la suite  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifie la relation de récurrence  $U_{n+1} = MU_n$ . Par récurrence immédiate, on a donc, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $U_n = M^n U_0 = PD^n P^{-1} U_0$ . On calcule très simplement  $D^n$  (ce sont les puissances d'une matrice diagonale dont les coefficients sont  $\pm 1$  et 0), on en déduit une formule simple pour  $U_n$ , donc pour les quatre probabilités  $\mathbf{P}(A_n = \omega_k)$ .

**Q14.** Si  $X$  suit une loi de Rademacher, alors par définition  $X(\Omega) = \{-1; 1\}$  qui est bien un ensemble fini. Ainsi  $X \in V_f(\Omega)$ . De plus,  $\mathbf{E}(X) = 1 \cdot \mathbf{P}(X = 1) - 1 \cdot \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ .

**Q15.** Il est clair que  $V_f(\Omega)$  est inclus dans l'espace vectoriel des variables aléatoires sur  $\Omega$  et que la variable aléatoire nulle appartient à  $V_f(\Omega)$ .

Soient donc  $X, Y \in V_f(\Omega)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Il s'agit de montrer que  $(\lambda X + \mu Y)(\Omega)$  est un ensemble fini. Supposons que  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  sont de cardinal respectif  $m$  et  $n$ . Alors l'ensemble des valeurs possibles de  $\lambda X + \mu Y$  est inférieur au nombre de couples possibles dans  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , qui est de cardinal  $mn < \infty$ . On en déduit que  $(\lambda X + \mu Y) \in V_f(\Omega)$ .

L'ensemble  $V_f(\Omega)$  est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires sur  $\Omega$ , donc un espace vectoriel.

**Q16.** L'application  $\Phi$  est définie sur  $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .

- Soient  $X, Y \in V_f(\Omega)$ . Alors  $\Phi(X, Y) = \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(YX) = \Phi(Y, X)$  donc  $\Phi$  est symétrique.
- Soient  $X_1, X_2, Y \in V_f(\Omega)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Par linéarité de l'espérance,

$$\Phi(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \mathbf{E}((\lambda X_1 + \mu X_2)Y) = \lambda \mathbf{E}(X_1 Y) + \mu \mathbf{E}(X_2 Y) = \lambda \Phi(X_1, Y) + \mu \Phi(X_2, Y),$$

on en déduit que  $\Phi$  est linéaire à gauche, donc bilinéaire par symétrie.

- Soit  $X \in V_f(\Omega)$ . Alors  $\Phi(X, X) = \mathbf{E}(X^2) \geq 0$  car  $X^2$  est une variable aléatoire positive. La forme  $\Phi$  est donc positive.
- Soit  $X \in V_f(\Omega)$ . On suppose que  $\Phi(X, X) = 0$ ; on a alors  $\mathbf{E}(X^2) = 0$ , mais  $X^2$  étant une variable aléatoire positive, son espérance est nulle ssi elle est constamment nulle. On a donc  $X^2 = 0$ , puis  $X = 0$ . Ainsi  $\Phi$  est une forme définie.

On a donc bien un produit scalaire.

**Q17.** Soient  $i \neq j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Alors  $\Phi(X_i, X_j) = \mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j)$  car  $X_i$  et  $X_j$  sont indépendantes. D'après **Q14**, ces deux espérances sont nulles donc  $\Phi(X_i, X_j) = 0$ .

**Q18.** D'après la question précédente, la famille  $(X_1, \dots, X_n)$  est orthogonale; de plus elle ne contient pas le vecteur nul, elle est donc libre. On en déduit que  $F = \text{Vect}(X_1, \dots, X_n)$  est de dimension  $n$ .

**Q19.** Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Si  $X$  et  $X_i$  sont indépendantes, alors on a  $\Phi(X, X_i) = \mathbf{E}(XX_i) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(X_i) = 0$  car  $X_i$  est de Rademacher (**Q14**). Ainsi, si  $X$  est indépendante de toutes les  $X_i$ , alors  $X \in \{X_1, \dots, X_n\}^\perp = (\text{Vect}(X_1, \dots, X_n))^\perp = F^\perp$ .

**Q20.** Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , remarquons que  $\frac{X_i+1}{2}$  est une variable aléatoire dont l'univers-image est  $\{0; 1\}$ , ces deux valeurs étant équiprobables; bref, c'est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{2}$ . De plus, les  $(\frac{X_i+1}{2})_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  sont mutuellement indépendantes car les  $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  le sont. On en déduit que  $X$  est une somme de  $n$  variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$  et mutuellement indépendantes, elle suit donc la loi binomiale de paramètres  $(n, \frac{1}{2})$ .

D'après le théorème des projections,  $d(X, F) = \sqrt{\|X\|^2 - \|p(X)\|^2}$ , où  $p(X)$  désigne le projeté orthogonal de  $X$  sur  $F$ . D'une part,

$$\|X\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Phi(X_i + 1, X_j + 1) = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \underbrace{\Phi(X_i, X_j)}_{=\delta_{i,j}} + \underbrace{\Phi(X_i, 1)}_{=\mathbf{E}(X_i)=0} + \underbrace{\Phi(1, X_j)}_{=\mathbf{E}(X_j)=0} + \underbrace{\Phi(1, 1)}_{=\mathbf{E}(1)=1} \right) = \frac{n + n^2}{4}$$

D'autre part, remarquons que pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\mathbf{E}(X_i^2) = \mathbf{E}(1) = 1$ ; la famille  $(X_1, \dots, X_n)$ , dont on savait déjà qu'elle est une base orthogonale de  $F$ , est donc en fait *orthonormée*. On peut donc calculer  $p(X)$  par la formule

$$\begin{aligned} p(X) &= \sum_{j=1}^n \Phi(X, X_j) X_j = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Phi(X_i + 1, X_j) X_j = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\Phi(X_i, X_j) X_j + \Phi(1, X_j) X_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n X_j \text{ par les mêmes arguments que pour le calcul de } \|X\|. \end{aligned}$$

On a donc, d'après le théorème de Pythagore (les  $X_j$  étant deux à deux orthogonaux),

$$\|p(X)\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \|X_j\|^2 = \frac{n}{4}, \quad \text{d'où} \quad d(X, F) = \sqrt{\frac{n + n^2}{4} - \frac{n}{4}} = \frac{n}{2}.$$

## PROBLÈME II. SÉRIES DE FOURIER ET ÉQUATION DE LA CHALEUR

**Q1.** Supposons  $F$  paire. Alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt = \int_{-1}^0 F(t) \sin(n\pi t) dt + \int_0^1 F(t) \sin(n\pi t) dt$$

On fait dans la première intégrale le changement de variables  $u = -t$ , puis on utilise la parité de  $F$  et l'imparité de la fonction  $t \mapsto \sin(n\pi t)$  :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt &= \int_1^0 F(-u) \sin(-n\pi u) (-du) + \int_0^1 F(t) \sin(n\pi t) dt \\ &= \int_0^1 F(-u) \sin(-n\pi u) du + \int_0^1 F(t) \sin(n\pi t) dt \\ &= \int_0^1 F(u) (-\sin(n\pi u)) du + \int_0^1 F(t) \sin(n\pi t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, si  $F$  est impaire, alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_n(F) = 0$ .

**Q2.** Supposons  $F$  paire. Alors, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $F(-x) = F(x)$ . On dérive des deux côtés de l'égalité à l'aide de la formule de dérivation des composées : pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $-F'(-x) = F'(x)$ , ce qui montre que  $F'$  est impaire.

**Q3.** La fonction  $F$  étant 2-périodique,

$$a_0(F') = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F'(t) dt = \frac{1}{2} [F(t)]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (F(1) - F(-1)) = 0$$

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . La fonction  $F'$  étant continue et la fonction  $t \mapsto \cos(n\pi t) \mathcal{C}^1$ , on a :

$$\begin{aligned} a_n(F') &= \int_{-1}^1 \underbrace{F'(t)}_{\cos(n\pi t)} dt \\ &= [F(t) \cos(n\pi t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 F(t) (-n\pi \sin(n\pi t)) dt \\ &= 0 + n\pi b_n(F), \end{aligned}$$

le crochet étant nul car les deux fonctions  $F$  et  $t \mapsto \cos(n\pi t)$  sont 2-périodiques donc prennent la même valeur en 1 et  $-1$ .

On en déduit de même  $b_n(F') = -n\pi a_n(F)$ , le changement de signe provenant du fait que  $\sin' = +\cos$ , ce qui fait que le signe moins donné par la formule d'intégration par parties n'est pas compensé (contrairement au calcul ci-dessus).

**Q4.** Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on a :

$$0 \leq n^2(a_n(F))^2 \leq n^2((a_n(F))^2 + (b_n(F))^2) = \frac{1}{\pi^2}((a_n(F'))^2 + (b_n(F'))^2)$$

Or la série de terme général  $((a_n(F'))^2 + (b_n(F'))^2)$  est convergente en vertu du théorème de Parseval (la fonction  $F'$  étant continue par morceaux et périodique). Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général  $n^2(a_n(F))^2$  converge. De même pour la série  $\sum n^2(b_n(F))^2$ .

**Q5.** On applique trois fois les formules de **Q3** :

$$\begin{cases} a_0(F^{(3)}) = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n(F^{(3)}) = -n^3\pi^3 b_n(F) \text{ et } b_n(F^{(3)}) = n^3\pi^3 a_n(F). \end{cases}$$

La fonction  $F$  étant impaire, on sait de plus que  $a_n(F) = 0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . On a donc, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $b_n(F^{(3)}) = 0$ .

**Q6.** De la même manière qu'à la question **Q4**, il suffit d'appliquer la formule de Parseval à la fonction  $F^{(3)}$  (périodique et continue par morceaux).

**Q7.** Pour tous  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ , autrement dit  $2|ab| \leq a^2 + b^2$ , d'où le résultat.

**Q8.** Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , il suffit d'appliquer l'inégalité ci-dessus à  $a = n^3 b_n(F)$  et  $b = \frac{1}{n}$ .

**Q9.** D'après **Q6**, la série de terme général  $n^6(b_n(F))^2$  est convergente. La série de terme général  $\frac{1}{n^2}$  l'est également (série de Riemann d'exposant  $2 > 1$ ). Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, l'inégalité démontrée à la question précédente implique que la série  $\sum n^2 |b_n(F)|$  est convergente ; autrement dit, la série  $\sum n^2 b_n(F)$  est absolument convergente, donc convergente.

**Q10.** Il existe une unique manière de prolonger la fonction  $f$  sur  $[-1; 1]$  par imparité (en posant  $F(x) = -f(-x)$  pour tout  $x \in [-1; 0]$ , ce qui est possible car  $f(0) = 0$ ). On obtient ainsi une fonction définie sur un intervalle de longueur 2, qui peut donc être prolongée de manière unique en une fonction 2-périodique sur  $\mathbf{R}$ . Notons que le prolongement est possible sans conflit de définition puisqu'on a  $f(0) = f(1) = 0$  donc la fonction est nulle à l'endroit de tous les raccordements.

**Q11.** On commence par construire l'image de la courbe de  $f$  par la symétrie de centre l'origine du repère, puis on construit l'image de la courbe ainsi obtenue par toutes les translations de vecteurs  $(2n, 0)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**Q12.** Au point 0, la courbe représentative de  $F$  admet deux demi-tangentes à gauche et à droite, notons  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  leurs vecteurs directeurs respectifs. Par construction,  $\vec{u}$  est l'image de  $\vec{v}$  par la symétrie de centre  $O$ , en particulier  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires. Les deux demi-tangentes sont donc parallèles, de plus elles passent toutes les deux par le point  $(0, 0)$ , elles sont donc confondues ; ainsi la courbe représentative de  $F$  possède une tangente en 0. Son coefficient directeur est donné par  $f'(0)$ .

Au point 1, avec les mêmes notations, le vecteur  $\vec{v}$  est (par périodicité) aussi égal au vecteur directeur de la demi-tangente à droite en  $-1$ . La symétrie de centre  $O$  envoie donc ce vecteur sur  $\vec{u}$ , et on conclut de la même manière. De même en  $-1$ . Les tangentes en 1 et  $-1$  ont toutes les deux pour coefficient directeur  $f'(1)$ .

**Q13.** D'après les conditions initiales, on a  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . En dérivant par rapport à  $t$ , on en déduit l'égalité demandée.

**Q14.** D'après l'équation (1) et la question précédente, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0$ . Par ailleurs, en dérivant deux fois les conditions initiales, on voit que  $f''(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, x)$  pour tout  $x \in [0; 1]$ . En combinant ces deux égalités (pour  $t = 0$  et  $x \in \{0; 1\}$ ), on a donc  $f''(0) = f''(1) = 0$ .

**Q15.** On vérifie que  $f$  satisfait toutes les hypothèses de la partie II :  $f$  est  $\mathcal{C}^3$  donc  $\mathcal{C}^1$  et  $f(0) = f(1) = 0$ . On peut donc la prolonger de manière unique en une fonction impaire et 2-périodique. De plus  $f''(0) = f''(1) = 0$ , le prolongement est donc de classe  $\mathcal{C}^3$ .

**Q16.** On procède comme à la question précédente :  $g_t$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  (comme restriction de  $u$ ) et vérifie  $g_t(0) = g_t(1) = 0$ . Comme aux questions précédentes, on a  $g_t''(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = 0$  et de même  $g_t''(1) = 0$ .

**Q17.** La fonction  $G_t$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (donc en particulier continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux) et 2-périodique ; en vertu du théorème de Dirichlet, elle est égale à sa série de Fourier. De plus, s'agissant d'une fonction impaire, tous les coefficients  $a_n(G_t)$  sont nuls ; on peut donc écrire, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$G_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(t) \sin(n\pi x),$$

où  $\beta_n(t) = b_n(G_t)$ .

**Q18.** Remarquons que  $g_0 = f$  par définition, donc  $G_0 = F$  par unicité des prolongements. D'après la question précédente, on a donc :

$$\beta_n(0) = b_n(G_0) = b_n(F) = \int_{-1}^1 F(t) \sin(n\pi t) dt.$$

**Q19.** La fonction  $G_t''$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (puisque  $G_t$  est  $\mathcal{C}^3$ ), en particulier elle est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux donc égale à sa série de Fourier d'après le théorème de Dirichlet : pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} G_t''(x) &= a_0(G_t'') + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(G_t'') \cos(n\pi x) + b_n(G_t'') \sin(n\pi x)) \\ &= -n^2 \pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(G_t) \cos(n\pi x) + b_n(G_t) \sin(n\pi x)) \quad \text{d'après Q3} \\ &= -n^2 \pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(t) \sin(n\pi x) \quad \text{car } G_t \text{ impaire.} \end{aligned}$$

**Q20.** Si  $(t, x) \in \Delta$ , alors  $U(t, x) = u(t, x)$  ; l'égalité demandée est alors simplement la réécriture de l'équation (1) avec la formule de la question **Q19**.

**Q21.** C'est une équation linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants, ses solutions sont les fonctions  $t \mapsto \lambda e^{-n^2 \pi^2 t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

**Q22.** D'après les deux questions précédentes, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe  $\lambda_n \in \mathbf{R}$  tel que  $\beta_n(t) = \lambda_n e^{-n^2 \pi^2 t}$ . La question **Q18** donne la condition initiale  $\beta_n(0) = b_n(F)$ , on en déduit que  $\lambda_n = b_n(F)$ , autrement dit  $\beta_n(t) = b_n(F) e^{-n^2 \pi^2 t}$ . Par définition des coefficients  $\beta_n$ , on a donc, pour tous  $(t, x) \in \Delta$  :

$$u(t, x) = G_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(F) e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x).$$