1. On se place sur $\mathbf{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux à coefficients réels. On définit $\varphi\colon \mathbf{R}_2[X] \times \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}$ par

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{R}_2[X] \times \mathbf{R}_2[X] \ \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$$

(1) Montrer que φ est un produit scalaire.
(2) Écrire un script en langage Python pour calculer $\varphi(X^2+1, X^2-1)$.
(3) Calculer $\|X^2-5\|$.
(4) Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$; en déduire la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ de la projection orthogonale sur $\mathbf{R}_1[X]$.
(5) Calculer la distance de X^2+1 à $\mathbf{R}_1[X]$.

2. On considère la matrice réelle M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer M^2 et M^3.
(2) Établir une relation entre M, M^2 et M^3.
(3) On considère le polynôme $P = X^3 - X^2 - 2X$. Déterminer les racines de P.
(4) (a) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Écrire la relation de division euclidienne de X^n par P. Préciser le degré du reste R_n.
   (b) Évaluer l'expression précédente en 0, -1 et 2.
(5) Déduire de ce qui précède la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.
(6) On considère les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \ \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n \\ c_{n+1} = a_n \end{cases}$$

   (a) Écrire une fonction en Python prenant en paramètre un entier n et renvoyant les valeurs a_n, b_n et c_n.
   (b) Donner une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

3. On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H)\colon 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E)\colon 2xy' - 3y = \sqrt{X}.$$

(1) (a) Justifier, sans les déterminer, que (H) admet des solutions sur $]0;+\infty[$.
   (b) Que doit-on rajouter comme donnée pour avoir une unique solution ?
(2) Dans cette question, on cherche à déterminer une valeur approchée de la solution y de (H) avec la condition initiale $y(1) = 1$ sur l'intervalle $[a;b] = [1;2]$.
   (a) Expliquer la méthode d'Euler.
   (b) Écrire en Python une fonction `euler` prenant en entrée un paramètre n (permettant de fixer le pas $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$) qui donne une approximation de la solution de l'équation (H). La fonction doit renvoyer deux listes : la liste X des x_k et la liste Y des $f(x_k)$. On pourra utiliser la relation

$$y_{k+1} = \left(\frac{3h}{2x_k} + 1\right) y_k.$$

(3) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
(4) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
(5) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4.

(1) (a) Rappeler la dérivée de la fonction arctangente et son ensemble de définition.

(b) Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\nu}{1+\nu^2}.$$

(2) Pour tout $a > 0$, on pose
$$J(a) = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin^2(x)}.$$

(a) Justifier que $J(a)$ existe pour tout $a > 0$.

(b) À l'aide de l'outil informatique, en utilisant la méthode des rectangles, donner une valeur approchée de $J(3)$.

(c) Montrer que, pour tout réel x,
$$\frac{1}{1+a\sin^2(x)} = \frac{1+\tan^2(x)}{1+(a+1)\tan^2(x)}.$$

(d) À l'aide du changement de variables $u = \tan x$, montrer que
$$J(a) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(a+1)u^2}.$$

(e) En déduire que $J(a) = \dfrac{C}{\sqrt{a+1}}$, où $C > 0$ est une constante à déterminer. On pourra vérifier le résultat à l'aide du calcul effectué à la question (2) (b).

(3) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_n = J(e^{n\pi})$. Déterminer la nature de la série $\sum J_n$.

5. Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $x \in \mathbf{R}$. L'exercice s'intéresse à l'inversibilité de la matrice carrée d'ordre n :
$$M_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$
On considère également $\Delta_n(x) = \det M_n(x)$.

(1) (a) Montrer que $M_1(x)$ et $M_2(x)$ sont inversibles pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(b) À l'aide de l'outil informatique, comparer la fonction Δ_4 et la fonction $x \mapsto 1+x^2+x^4+x^6+x^8$.

(c) Émettre une conjecture sur la forme de $\Delta_n(x)$.

(2) Établir une relation de récurrence liant $\Delta_{n+2}(x)$, $\Delta_{n+1}(x)$ et $\Delta_n(x)$.

(3) Démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.

(4) Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_n(x)$ est-elle inversible ?

(5) Dans cette question, on suppose que $x \in \mathbf{C}$.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_1(x)$ n'est-elle pas inversible ?

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_2(x)$ n'est-elle pas inversible ?

(c) Généraliser les résultats précédents pour déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbf{C}$ la matrice $M_n(x)$ est inversible.