

1.

- (1) Déterminer pour quels $x \in \mathbf{R}$ la série de terme général $\frac{1}{n^x}$ est convergente. On note $\zeta(x)$ sa somme le cas échéant.
- (2) Écrire une fonction `zeta` qui prend en entrée un réel x et un entier N et renvoie une approximation de $\zeta(x)$ à l'aide d'une somme partielle à N termes.
- (3) Compléter les égalités suivantes : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{\dots}$; $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{\dots}$; $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{\dots}$.
- (4) Vérifier qu'on ne trouve pas le même genre de formule pour les entiers impairs.

2. Calculer une valeur approchée des intégrales suivantes, à l'aide de la méthode des rectangles ou des trapèzes :

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx; \quad I_2 = \int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5} dx; \quad I_3 = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}}.$$

3.

- (1) Résoudre de manière exacte l'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. Quelle est alors la valeur de $y(1)$?
 - (2) Résoudre de manière approchée la même équation différentielle à l'aide de la méthode d'Euler. Comparer la valeur approchée de $y(1)$ avec sa valeur exacte.
4. À l'aide de la méthode d'Euler, résoudre l'équation différentielle $y' = y \cdot (1 - \frac{y}{100})$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ sur l'intervalle $[0; 15]$. Tracer la solution obtenue.
5. Tracer la courbe paramétrée par $x = \cos t(1 + \cos t)$, $y = \sin t(1 + \cos t)$ ($t \in [-\pi; \pi]$).
6. Un conducteur prend sa voiture tous les jours. Chaque jour, il a une chance sur deux de faire un excès de vitesse et une chance sur dix de subir un contrôle radar (ces deux événements étant supposés indépendants). Si le conducteur est contrôlé alors qu'il est en excès de vitesse, il perd un point sur son permis. On note X le nombre de points perdus un jour donné.
- (1) Écrire une fonction `X` simulant la variable aléatoire X .
 - (2) Donner une valeur approchée de l'espérance et de la variance de X .
 - (3) Le conducteur n'a que six points sur son permis. Quelle est la probabilité (approchée) qu'il ait encore le droit de rouler au bout d'une semaine ? un mois ? un an ?

7. Une urne contient des boules rouges, vertes et bleues indiscernables au toucher, en quantités égales. On effectue une suite de tirages dans cette urne, avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au rang du premier tirage pour lequel on obtient une boule d'une couleur différente de celle du premier tirage.

On note Y la variable aléatoire égale au rang du premier tirage pour lequel on obtient une boule de la troisième couleur.

- (1) Écrire une fonction `X()` simulant la variable aléatoire X , en déduire une estimation de son espérance et de sa variance.
- (2) Même question avec la variable Y .
- (3) Estimer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X, Y)$.

8.

- (1) Écrire une fonction qui prend en entrée deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ (sous forme d'un couple de listes) et renvoie leur produit scalaire.
- (2) Écrire une fonction qui prend en entrée une base de $\mathbf{R}^3$ (sous forme d'un triplet de listes) et renvoie le résultat du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.