1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère l'application $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ par $f(M) = AM$.

(1) Vérifier que f est linéaire.

(2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

(3) On considère les quatre matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

(4) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

(5) Que peut-on en déduire concernant l'application f ?

2. Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in \,]0;1[$. Calculer $\mathbf{E}(\frac{1}{X})$.

3. Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul suivant la loi de probabilité : $\forall\, n \in \mathbf{N}^*\ \mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$. Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

(1) Vérifier que la variable aléatoire N est bien définie.

(2) Quelle est la probabilité de gagner une partie ?

(3) On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de G, puis son espérance.

4. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2}$; on note $M(t)$ le point du plan de coordonnées $(x(t); y(t))$ dans une base orthonormée directe, et Γ l'arc paramétré correspondant.

(1) Montrer que l'équation $t^4 + 4t^2 = 1$ admet deux solutions réelles ; étudier leur signe.

(2) Tracer Γ ; on étudiera en particulier les asymptotes.

(3) Soient $A(1;0)$, $p \in \mathbf{R}^*$ et D la droite d'équation $y = p(x-1)$.

(a) Montrer que D passe par A et coupe Γ en deux autres points ; on note t_1 et t_2 les paramètres de ces points.

(b) Montrer que les droites $(OM(t_1))$ et $(OM(t_2))$ sont orthogonales.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A) = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = 0$.

(1) Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle.

(2) Montrer que n est nécessairement pair.

(3) Calculer le déterminant et la trace de A.

7. Soit $t \in \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. On note $x = \tan(t/2)$.

(1) Monter que $\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et que $\sin t = \frac{2x}{1+x^2}$.

(2) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t + 2\sin t + 3}.$$