1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(2) Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A.

(3) Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$$

2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. Calculer a_0 et a_1.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.

(3) Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de a_n. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

4. Donner la nature géométrique de l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour tous $f, g \in E$, on pose :

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right)\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que φ est un produit scalaire.

(2) Soient $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que V et W sont des supplémentaires orthogonaux.

(3) Donner une expression analytique de la projection orthogonale sur W.

6. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la surface $(\mathcal{S})\colon z^2 = xy$.

(1) Pour tout $M(x;y;z) \in (\mathcal{S})$, déterminer le plan tangent à $(\mathcal{S})$ en M.

(2) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels ce plan tangent contient la droite :

$$(\mathcal{D})\colon \begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$$

7. Déterminer les extrema éventuels sur $\mathbf{R}^2$ de la fonction $f\colon (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 5x - y$.

8. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $u_n = \displaystyle\sum_{k=1} n(\ln k)^2$.

(1) Montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^k (\ln t)^2\,\mathrm{d}t \leq (\ln k)^2 \leq \int_k^{k+1} (\ln t)^2\,\mathrm{d}t.$$

(2) En déduire que, pour tout $n \geq 2$,

$$\int_1^n (\ln t)^2\,\mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_2^{n+1} (\ln t)^2\,\mathrm{d}t.$$

(3) Donner un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.