

1. Soient $a, b \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $P = (X - a)^n(X - b)^n$.

- (1) Donner une expression de la dérivée n -ème de P .
- (2) En réécrivant l'égalité précédente dans le cas où $a = b$, en déduire la valeur de la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

2. Soit

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer J^2 . Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de J ?
- (2) La matrice J est-elle inversible ? Sans calculer le polynôme caractéristique de J , déterminer ses valeurs propres puis montrer qu'elle est diagonalisable.
- (3) Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, on pose $M(a, b) = aI_3 + bJ$. Montrer que $M(a, b)$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. À quelle condition est-elle inversible ?
- (4) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = I_3 + (-1 + e^x)J$. Calculer le produit $F(x)F(y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$. En déduire que $F(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbf{R}$ et calculer son inverse.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \max\{\sin x, 0\}$.

- (1) Étudier la périodicité de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
- (2) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- (3) Déterminer la somme des séries $\sum \frac{1}{4k^2-1}$ et $\sum \frac{1}{(4k^2-1)^2}$.
- (4) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(kx)}{4k^2 - 1}.$$

4. On se place dans l'espace affine $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient $A = (1, -1, 0)$, $B = (3, 1, 0)$, $\vec{u} = (2, 1, 0)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

- (1) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$, puis de la droite Δ passant par B et dirigée par $\vec{v}$.
- (2) Déterminer la distance entre les droites D et Δ .

5. Soient $a, n \in \mathbf{N}^*$. On considère $N = an$ clients qui s'approvisionnent chez n fournisseurs. Chaque client choisit un fournisseur au hasard. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i le nombre de clients du fournisseur i . On note Y le nombre de fournisseurs n'ayant aucun client.

- (1) Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i .
- (2) Que vaut $X_1 + \dots + X_n$? En déduire $\mathbf{E}(X_i X_j)$ et $\text{Cov}(X_i, X_j)$ pour tous $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- (3) Donner l'expression du coefficient de corrélation linéaire de X_i et X_j . Que remarque-t-on dans le cas où $n = 2$?
- (4) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note β_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le fournisseur i n'a pas de client, et 0 sinon. Exprimer Y en fonction des β_i , puis déterminer $\mathbf{E}(Y)$.
- (5) Calculer $\text{Cov}(\beta_i, \beta_j)$ pour tous $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer la variance de Y .