1. Soit $n \geq 2$. On considère l'application $f\colon \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ définie par :
$$f(P) = XP(1) + (X^2 - 4)P(0).$$

(1) Justifier que f est linéaire et bien définie.

(2) Déterminer les dimensions de l'image et du noyau de f.

2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

(1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n}$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq 2 + u_{n+1} - u_n.$$

(3) Montrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

3. Soit $U =]0;+\infty[\times \mathbf{R}$. Résoudre sur U l'équation aux dérivées partielles :
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
On pourra s'aider du changement de variables $(u, v) = (x, \frac{y}{x})$.

4. Soit $n \geq 1$. Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher. Parmi ces boules, n portent le numéro 0 et les n autres sont numérotées de 1 à n. On tiree aléatoirement une poignée de n boules dans l'urne.

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note U_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule portant le numéro k est dans la poignée, et 0 sinon.

(1) Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Déterminer la loi de U_k. Donner son espérance et sa variance, puis calculer $\mathrm{Cov}(U_i, U_j)$ pour tous $i \neq j \in [\![1;n]\!]$.

(2) Soit $N = U_1 + \cdots + U_n$. Que représente N ? Calculer son espérance et sa variance.

(3) Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules présentes dans la poignée. Exprimer S en fonction des U_k et donner son espérance.

(4) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules numérotées 0 présentes dans la poignée. Exprimer Z en fonction de N, puis calculer $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{V}(Z)$.

5. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^n}$.

(1) Justifier que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \geq 1$.

(2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ possède une limite finie.

(3) À l'aide du changement de variables $u = \frac{1}{x}$, montrer que
$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

(4) Calculer I_1 (on pourra poser $v = u - \frac{1}{u}$).

(5) Calculer I_n pour tout $n \geq 1$.

6. Résoudre le système différentiel :
$$\begin{cases} x' = -3x + y + z \\ y' = x - 3y + z \\ z' = x + y - 3z \end{cases}$$