1. On s'intéresse à la série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ la n-ème somme partielle.

(1) Montrer que la série est convergente. On note S sa somme.

(2) Tracer les S_n pour tout $n \geq 200$.

(3) On permute les termes, alternant un terme positif puis deux termes négatifs, dans l'ordre, et on note T_n la somme partielle d'ordre n correspondante :

$$T_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots$$

Tracer les T_n pour $n \geq 200$.

(4) On permute les termes autrement : deux termes positifs, puis un terme négatif, et ainsi de suite. Tracer les sommes partielles correspondantes U_n pour $n \geq 200$.

2. On considère le système différentiel avec condition initiale :

$$\begin{cases} 4x' = -11x - 15y + 61z \\ 4y' = -11x + 17y + 17z \\ 2z' = -x + 3y + 5z \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = z(0) = 1.$$

(1) Résoudre le système de manière approchée à l'aide d'une discrétisation et tracer l'allure des solutions.

(2) Donner les éléments propres de la matrice $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -11 & -15 & 61 \\ -11 & 17 & 17 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

(3) En déduire la résolution exacte du système.

(4) Comparer graphiquement les résultats des questions (1) et (3).

3. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. Le premier joueur tire des boules de l'urne sans remise. Il s'arrête lorsqu'il obtient la boule numéro n. On note X_1 le nombre de tirages effectués par ce joueur.

Le deuxième joueur effectue des tirages sans remise jusqu'à ce qu'il obtienne la boule de numéro maximal restant dans l'urne. On note X_2 le nombre de tirages effectués par le deuxième joueur (en prenant par convention $X_2 = 0$ si $X_1 = n$).

(1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_1.

(2) Écrire une fonction simulant X_1 et X_2.

(3) Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(X_2 = k \mid X_1 = j)$.

(4) En déduire la loi de X_2 ainsi que son espérance.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \, \mathrm{d}t$.

(1) Justifier l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

(2) Écrire une fonction calculant la valeur approchée de u_n à l'aide de la méthode des rectangles ou des trapèzes.

(3) Tracer l'évolution de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et conjecturer sa limite.