Continuité

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$.

(1) Montrer que f peut-être prolongée en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$.

(2) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.

(3) La fonction dérivée f' est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Rappeler la définition et le domaine de définition de la *fonction puissance* $x \mapsto x^\alpha$ (on pourra distinguer des cas suivant les propriétés du nombre α). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit prolongeable par continuité en 0.

3. On considère le polynôme $P(x) = 6x^3 - 9x^2 + 1$. Montrer que P admet trois racines réelles distinctes et en donner un encadrement à l'unité. Donner la valeur exacte de la somme et du produit des trois racines.

4. ($\star$) Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. On suppose que $f^2 = f$. Montrer que f est constante.

Propriétés élémentaires

5.

(1) Soit $t \in [0;1]$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, calculer la distance entre le point de coordonnées $(t, \sqrt{1-t^2})$ et l'origine du repère.

(2) En déduire, sans aucun calcul, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

6. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, notons R_n l'estimation de l'intégrale de f par la méthode des rectangles au rang n.

(1) Rappeler l'expression de R_n et sa limite pour $n \to +\infty$.

(2) Écrire une expression similaire pour T_n, l'estimation de l'intégrale de f par la méthode des *trapèzes* au rang n.

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $T_n = R_n + (f(b) - f(a))\frac{b-a}{2n}$.

7.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(2) En déduire la valeur des sommes de Riemann de la fonction $x \mapsto x^2$ sur le segment $[0;1]$.

(3) En passant à la limite, donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$.

8. À l'aide des sommes de Riemann de la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0;1]$, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}.$$

9. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ le n-ème *nombre harmonique*.

(1) Calculer H_1, H_2 et H_3. Quelle est la monotonie de la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$?

(2) Justifier que, pour tout $k \geq 2$,
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

(3) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,
$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

(4) En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Calculs

10. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \tan x,\ \text{sur } \left]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right[;\quad x \mapsto e^x \sin x,\ \text{sur } \mathbf{R};\quad x \mapsto \frac{\ln x}{x},\ \text{sur } \mathbf{R}_+^\star;\quad x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2},\ \text{sur } \mathbf{R}.$$

11. Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^{\pi/3} (\tan t)^2\,\mathrm{d}t;\qquad \int_0^3 |t^2 - 3t + 2|\,\mathrm{d}t;\qquad \int_0^1 (1+t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

12. Calculer les intégrales suivantes (on pourra procéder par intégration par parties) :
$$\int_1^e t^2 \ln t\,\mathrm{d}t;\qquad \int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t;\qquad \int_0^1 t^3 e^{t^2}\,\mathrm{d}t;\qquad \int \arctan t\,\mathrm{d}t,\ \text{sur } \mathbf{R}.$$

13. Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variables proposé entre parenthèses) :
$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t}\ (x = e^t);\qquad \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+4},\ \text{sur } \mathbf{R}\ (t = 2x);\qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t\ (x = \sin t);$$
$$\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t,\ \text{sur } \mathbf{R}_+^\star\ (x = \ln t);\qquad \int \cos\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t,\ \text{sur } \mathbf{R}_+^\star\ (x = \sqrt{t})$$

14. Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t};\qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t + \sin 2t};\qquad \int_1^2 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t;\qquad \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+4t+5},\ \text{sur } \mathbf{R}.$$

15. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Soit $a > 0$. Soit $T > 0$.

(1) On suppose f paire ; montrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) On suppose f impaire ; montrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(3) On suppose f T-périodique (autrement dit, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+T) = f(x)$). Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.