Généralités

1. Dire si les formes suivantes définissent un produit scalaire :

(1) $\varphi\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi\left(\binom{x}{y}, \binom{x'}{y'}\right) = xx' + yy' + xy' + yx'$.

(2) $\varphi\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi\left(\binom{x}{y}, \binom{x'}{y'}\right) = 2xx' + 3yy' + 2xy' + 2yx'$.

(3) $\varphi\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi(\alpha, \beta) = \mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta})$.

(4) $\varphi\colon \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

(1) Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$. Montrer que φ munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ d'une structure d'espace préhilbertien.

(2) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\mathrm{Tr}\, A \leq \sqrt{n\,\mathrm{Tr}(A^T A)}.$$

Dans quels cas a-t-on égalité ?

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

4. Soient A et B deux matrices symétriques de taille n. Montrer que

$$\big(\mathrm{Tr}(AB + BA)\big)^2 \leq 4\,\mathrm{Tr}(A^2)\,\mathrm{Tr}(B^2)$$

5. Soient $a < b$.Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est constamment nulle. Chercher des contre-exemples dans le cas où les hypothèses ne sont pas toutes vérifiées.

Orthogonalité

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour $X, Y \in \mathbf{R}^3$, on pose $\langle X, Y\rangle = X^T A Y$.

(1) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

(2) Donner une base des espaces $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)^\perp$ et $\mathrm{Vect}(e_2)^\perp$

7. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer une base orthonormée du plan $(2, -3, 6)^\perp$.

8. Sur $E = \mathbf{R}_2[X]$, on définit $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.

(1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

(2) Construire une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

9. On pose, pour tous $P, Q \in \mathbf{R}[X]^2$,

$$\langle P, Q\rangle) \int_0^{\pi} P(t)Q(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que $(\mathbf{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

(2) Construire une base de $\mathbf{R}_2[X]$ qui soit orthonormale pour ce produit scalaire.

Projections

10. Dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = (2,4,4)$ sur la droite vectorielle D engendrée par $v = (1,1,1)$. En déduire la distance entre u et D.

11. Dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(1,\dots,1)$.

12. Dans l'espace euclidien canonique $\mathbf{R}^3$, on pose $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x + y\big\}$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F

13. Déterminer la matrice de la projection orthogonale de $\mathbf{R}^3$ sur l'intersection des plans d'équation $x + y + z = 0$ et $x - z = 0$.

14. Déterminer le réel

$$d = \inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^\pi (t\cos t - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$$

(on pourra s'intéresser au projeté orthogonal de la fonction $t \mapsto t\cos t$ sur un sous-espace vectoriel bien choisi).

15. On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ du produit scalaire

$$\varphi\colon E \times E \to \mathbf{R}, \quad \varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(AB^T).$$

(1) Montrer que ϕ définit un produit scalaire.
(2) Déterminer une base orthonormée du sous-espace S des matrices symétriques.
(3) Justifier que toute matrice de E peut se décomposer de manière unique comme somme d'une matrice de S et d'une matrice de $S^\perp$. Expliciter cette décomposition.
(4) Soit $M \in E$. Calculer la distance de M à S.
(5) Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer une base orthonormée de $A^\perp$.
(6) Pour tout $M \in E$, donner le projeté orthogonal de M sur $A\perp$.

16. On se place dans $E = \mathbf{R}_3[X]$, muni du produit scalaire :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On pose $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

(1) Montrer que H est un hyperplan de E.
(2) Déterminer une base orthonormée de H.
(3) Donner la projection orthogonale de X sur H.
(4) Compléter la base de H obtenue à la question (2) en une base de E ; écrire alors la matrice de la projection orthogonale sur H dans cette base.
(5) Pour tout $P \in E$, expliciter la distance de P à H en fonction de ses coefficients.