TSI2 — **TD 12 – Séries de Fourier** — 2022-23

Coefficients de Fourier

1. Déterminer les séries de Fourier des fonctions 2π-périodiques suivantes :

(1) f impaire, avec $f(x) = 1$ sur $x \in [0; \pi]$;

(2) $f(x) = x$ si $x \in \left]-\pi; \pi\right]$;

(3) $f(x) = |x|$ si $x \in \left]-\pi; \pi\right]$;

(4) $f(x) = \cos^3(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

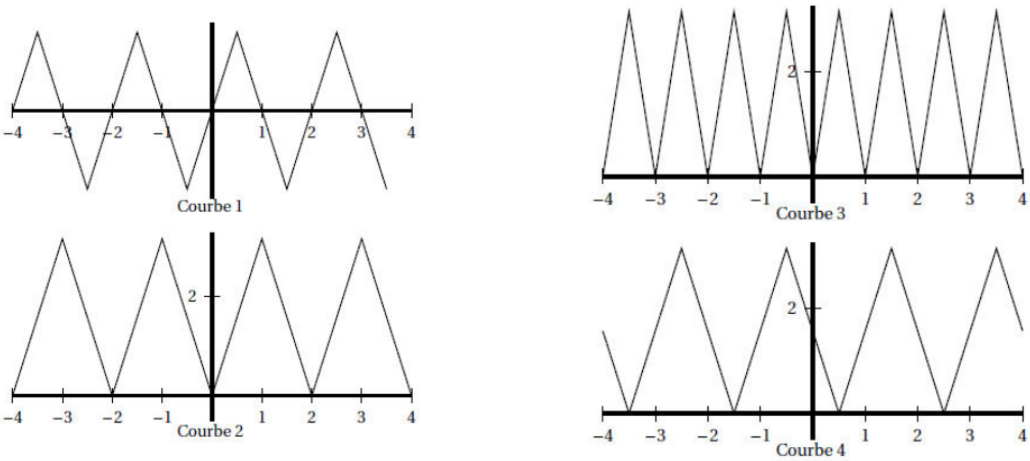
(5) f impaire, avec $f(x) = x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $f(x) = \pi$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

2. Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. On s'intéresse à la fonction f 2π-périodique telle que, pour tout $x \in \left[-\pi; \pi\right[$, $f(x) = \cos(\alpha x)$. Déterminer la série de Fourier de f.

3. Soit f une fonction continue par morceaux 2-périodique dont la série de Fourier est

$$S_f = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos\left(((2p+1)\pi t\right).$$

Parmi les quatre courbes représentées ci-dessous, laquelle correspond à la fonction f ? Déduisez-en l'expression de $f(t)$ pour tout $t \in [0; 1]$, puis retrouvez les coefficients de Fourier de f par le calcul.



Études complètes

4. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f paire 2π-périodique et définie par $f(x) = x$ sur $[0; \pi]$. En déduire les valeurs des séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

5. On considère la fonction définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi; \pi]$ et 2π-périodique. Déterminer les coefficients de Fourier de f et en déduire la somme des séries

$$\sum \frac{1}{n^2}, \qquad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n^4}.$$

6. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $\left]-\pi; \pi\right[$ par $f(x) = e^x$. Étudier la convergence de cette série, et en déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{1+n^2}$.

7. On fixe $\theta \in]0;\pi[$ et on considère l'application $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paire et 2π-périodique telle que, pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 0 & \text{si } x \in]\theta;\pi] \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement la restriction de f à $[-\pi;2\pi]$.

(2) Déterminer la série de Fourier de f.

(3) Étudier la convergence de cette série.

(4) En déduire, pour tout $\theta \in]0;\pi[$, la valeur des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^2}.$$

8. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f 2π-périodique telle que, pour tout $x \in [-\pi;\pi]$, $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$.

En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

9. Soit f la fonction 2π-périodique et impaire définie par $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ sur $]0;\pi]$.

(1) Dessiner l'allure du graphe de f.

(2) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

(3) Calculer la série de Fourier de f.

(4) En déduire la valeur des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

10. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-périodique définie par $f(x) = |\sin x|$ si $x \in]-\pi;\pi]$.

(1) Représenter graphiquement la fonction f.

(2) Justifier que f est égale à sa série de Fourier en tout $x \in \mathbf{R}$.

(3) Déterminer la série de Fourier de f.

(4) Calculer la somme de la série de terme général $\frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Questions théoriques

11. Démontrer le *lemme de Riemann-Lebesgue* : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Qu'en déduisez-vous concernant les coefficients de Fourier d'une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$?

12. Soit $T > 0$ et soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ deux suites réelles. Montrer qu'il existe *au plus* une application $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et T-périodique dont les coefficients de Fourier soient les nombres $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$. Existe-t-il toujours *au moins* une telle fonction ? Que dire si on remplace l'hypothèse « continue » par « continue par morceaux » ?

13.

(1) On considère la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = |\sin(\pi x)|$. Déterminer la série de Fourier de f et la somme de cette série.

(2) Soient $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(2\pi nt)$ sous la forme d'un polynôme en $\sin(\pi t)$.

(3) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que, pour tout $x \in [-1;1]$, $||x| - P(x)| \le \varepsilon$.

Dans cet exercice, on a montré un cas particulier du théorème de Weierstrass *qui affirme que, pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $|f(x) - P(x)| \le \varepsilon$ pour tout $x \in [a;b]$.*