Topologie

1. Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement la partie A. Dire si A est ouverte, fermée, bornée. Décrire son intérieur, son adhérence et sa frontière.

Parties de $\mathbf{R}$.

$$A = [a, b] \text{ avec } a \leq b \in \mathbf{R}; \quad A = [a, b[\text{ avec } a < b \in \mathbf{R}; \quad A = \mathbf{N}; \quad A = \mathbf{Q};$$

Parties de $\mathbf{R}^2$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 0\}; \quad A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y < x^2\}; \quad A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x-2| \geq 1\};$$

Parties de $\mathbf{R}^3$.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > 2\}; \qquad A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ et } z < 0\}.$$

2. Donner et réprésenter le domaine de définition des fonctions suivantes ; dire s'il est ouvert, fermé, borné :

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; \qquad f(x, y) = \left(\frac{1 - x^2}{y^2 - 1}\right)^{1/2}; \qquad f(x, y, z) = \ln(xyz).$$

Continuité et dérivées partielles

3. Soit f l'application définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

Déterminer le domaine de définition de f, puis montrer qu'on peut la prolonger en une application continue sur $\mathbf{R}^2$.

4. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}.$$

5. L'application $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0$$

est-elle continue ? Admet-elle des dérivées partielles en tout point ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

6. La fonction $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie de la manière suivante est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

$$f(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Extrema

7. Étudier les extrema de la fonction définie sur $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$ par $f(x, y) = xy(1 - x - y)$.

8. Montrer que la fonction $f(x, y) = 4x^2 + 2xy - 3y^2$ admet un mimimum sur le pavé $0 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 0$ et donner sa valeur.

9. On cherche à identifier le point de la surface $\mathcal{S}\colon z = xy - 1$ qui est le plus proche de l'origine.

(1) Expliquer pourquoi cela revient à déterminer le minimum éventuel de la fonction $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2xy + 1$ sur le carré $[-1, 1]^2$; justifier que ce point existe.

(2) Trouver ce point.

10. Déterminer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon 1.

11. On considère l'application $f\colon [-1;1]^2 \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto x^2y + \ln(1+y^2)$.

(1) Justifier que f admet un minimum et un maximum globaux.

(2) Montrer que f possède un unique point critique sur $]-1;1[^2$.

(3) Montrer que, pour tout $t \in\,]-1;+\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$. À l'aide de cette inégalité, étudier le signe de $f(x,x^3)$ de part et d'autre du point $x=0$. Qu'en déduit-on concernant la nature du point critique de f ?

(4) On pose, pour tout $t \in [-1;1]$,

$$\varphi_1(t) = t^2 + \ln 2, \quad \varphi_2(t) = -t^2 + \ln 2, \quad \varphi_3(t) = t + \ln(1+t^2).$$

Étudier les variations des fonctions φ_k ; en déduire les extrema globaux de f.

Équations aux dérivées partielles

12. Trouver toutes les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$ et pour tout $y \in \mathbf{R}$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x}.$$

On pourra s'aider d'un passage en coordonnées polaires.

13. Résoudre sur $\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}_+^\star$ l'équation différentielle

$$(E)\colon x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variables $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

14. Soit $a \in \mathbf{R}$. On cherche toutes les fonctions $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a.$$

(1) Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$.

(2) Intégrer la réponse de la question précédente pour en déduire l'expression de f.

(3) En déduire les solutions de l'équation initiale.

15. Chercher toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On pourra effectuer le changement de variables $u = ax + by$, $v = cx + dy$ avec des coefficients a, b, c, d bien choisis.

16. Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation suivante :

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

On pourra utiliser le changement de variables $u = x + at$, $v = x + bt$ avec des coefficients a et b bien choisis.

17. Soit $k \in \mathbf{R}$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = kf.$$

On pourra s'aider d'un passage en coordonnées polaires.