Sauf mention contraire, dans chaque exercice, le plan (resp. l'espace) est supposé muni d'un repère orthonormé direct.

GÉOMÉTRIE DU PLAN

1. Dans le plan muni d'une BOND $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère la base $(\vec{u}, \vec{v})$ obtenue par rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$ de cette dernière. Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
2. Dans le plan, on considère un segment $[AB]$ de milieu I . Montrer que, pour tout point M , on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$. En déduire le lieu géométrique des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = AB^2$.
3. Dans le plan complexe, calculer l'aire du triangle dont les sommets ont pour affixes respectives $i - 2$, $1 - i$ et $5 + 2i$.
4. On considère les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{1+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$. Déterminer la mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.
5. Déterminer une équation cartésienne de la droite du plan passant par le point $A(2; -1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $3x - 2y + 5 = 0$.
6. Déterminer un paramétrage de la droite passant par le point $A(-1; 3)$ et admettant $\vec{n}\binom{2}{1}$ comme vecteur normal.
7. Déterminer la distance du point $A(2; 1)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$.
8. On considère les points $A(3; 1)$ et $B(-2; 2)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre A passant par le point B .
9. On considère les points $A(3; 2)$, $B(-1; -2)$ et $\Omega(2; -1)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le cercle de centre Ω et de rayon 2.
10. On considère les points $I(-1; 2)$ et $M(x; y)$. Déterminer en fonction de x et de y les coordonnées de l'image M' du point M par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
11. On considère les points $A(-1; -3)$, $B(2; 1)$ et $M(x; y)$. Déterminer en fonction de x et de y les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite (AB) . En déduire les coordonnées du point M' image du point M par le réflexion d'axe (AB) .

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

12. Dans un cube, déterminer l'angle entre les demi-droites ayant pour origine le centre et passant par deux sommets consécutifs.
13. On considère les points $A(1; 0; -1)$, $B(1; 2; -1)$, $C(0; 2; -1)$ et $D(1; 2; 2)$. Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.
14. On considère les points $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 2; 1)$. Déterminer l'ensemble des points équidistants de A et B .
15. Dans l'espace muni d'un RON, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(1; 2; 3)$ sur le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.
16. Donner une équation cartésienne de l'ensemble X : $\begin{cases} x = 2 + t_1 + 3t_2 \\ y = 1 - 2t_1 \\ z = -1 + t_1 + t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R})$.
17. On considère les points $A(1; 2; 3)$ et $B(4; 4; 4)$. Déterminer le symétrique du point $M(-3; 1; 3)$ par rapport à la droite (AB) .

- 18.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $M(-2; 4; 0)$ sur la droite définie par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.
- 19.** On considère les points $A(0; -1; 2)$, $B(1; 0; 1)$, $C(0; 2; 0)$, $D(1; -1; -1)$ et $E(2; -2; -2)$. Déterminer l'intersection du plan (ABC) et de la droite (DE) .
- 20.** On considère les points $A(1; 1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(3; 3; 2)$, $D(3; 2; 3)$, $E(1; 2; 1)$ et $F(1; 3; 2)$. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (DEF) .
- 21.** Déterminer l'intersection du plan d'équation cartésienne $x - y + z - 11 = 0$ avec la sphère de centre $\Omega(1; -1; 3)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.
- 22.** On considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(1; 2; 0)$ et $C(1; -2; 1)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) et de la sphère de centre C et de rayon 3.
- 23.** On considère les points $A(-2; 6; 0)$, $B(5; -1; 0)$, $C(1; -2; 3)$ et $D(-2; 2; 4)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

COURBES ET SURFACES

- 24.** On considère les trois surfaces d'équations cartésiennes respectives :
- $$\mathcal{S}_1 : z = x^2 - y^2; \quad \mathcal{S}_2 : z = x^2 + y^2; \quad \mathcal{S}_3 : z = x^3.$$
- Pour chacune d'entre elles : vérifier que l'origine appartient à cette surface, déterminer le plan tangent à la surface en ce point, puis étudier la position relative du plan tangent et de la surface.
- 25.** On considère la fonction $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = f(x, y)$.
- (1) Déterminer une équation du plan tangent en $\mathcal{S}$ à l'origine.
 - (2) Étudier la position relative de $\mathcal{S}$ par rapport à ce plan tangent.
- 26.** Soit $\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$.
- (1) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle; en donner le centre, le rayon et un paramétrage.
 - (2) Déterminer des équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à $\mathcal{D}: 2x + y - 7 = 0$.
 - (3) Déterminer des équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par $A(1; 1)$.
- 27.** Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2yz + xy^3z + xyz^4 - 3 = 0$. Vérifier que $A(1; 1; 1) \in \mathcal{S}$ et donner l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en A .
- 28.** Déterminer tous les plans tangents à la surface d'équation $z - 8yz = 0$ qui contiennent la droite d'équations $\begin{cases} y = 1 \\ x + 4z + 2 = 0 \end{cases}$
- 29.** Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 0$. Tracer $\mathcal{C}$. Quels sont les points réguliers de $\mathcal{C}$?
- 30.** Soient $a, b > 0$. On considère la courbe $\mathcal{C}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- (1) Déterminer l'ensemble des points réguliers de $\mathcal{C}$.
 - (2) En chacun de ces points, donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$.
 - (3) Tracer $\mathcal{C}$.
- 31.** Soit $\mathcal{S}: (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$.
- (1) Déterminer les points réguliers de $\mathcal{S}$.
 - (2) Donner une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $(3; 0; 0)$.