Isométries

1. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. On suppose f diagonalisable. Montrer que c'est une symétrie.

2. Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soit $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$. On note U le vecteur de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

(1) Montrer que UU^T est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.

(2) Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(u)$ dans la base B.

3. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un espace euclidien E. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que s est une isométrie si et seulement si $G = F^{\perp}$.

4. Soient E un espace euclidien, $v \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On pose, pour $x \in E$, $f(x) = x + \lambda \langle x, v \rangle v$.

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit une isométrie.

(2) Caractériser géométriquement l'application f dans ce cas (indication : que dire de $f \circ f$?).

5. Soient E un espace euclidien et $f \colon E \to E$ une application *pas nécessairement linéaire.*

(1) On suppose que f préserve le produit scalaire (pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$; montrer qu'alors f est linéaire.

(2) On suppose que f préserve les distances (pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$) ; montrer qu'alors il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) = f(0) + g(x)$.

Matrices orthogonales

6. Soit f la rotation de $\mathbf{R}^3$ d'axe dirigé par le vecteur $(1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

7. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} ; \quad C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} ; \quad E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

8. Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ de sorte à avoir $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbf{R})$, puis déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme canoniquement associé.

9. Soient E un espace euclidien de dimension 2 et u, v deux vecteurs de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe *au moins* une isométrie f de E telle que $f(u) = v$. Déterminer alors *toutes* les isométries f de E telles que $f(u) = v$.

10. Soit $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

(1) Vérifier que M est une matrice orthogonale.

(2) Sans calculer le polynôme caractéristique de M, justifier que M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres avec multiplicité.