Familles, sous-espaces

1. Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ? des bases ?

$$\mathcal{V}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad (E = \mathbf{R}^3); \qquad \mathcal{V}_2 = \left(\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) \quad (E = \mathbf{R}^2);$$

$$\mathcal{V}_3 = \left(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2\right) \quad (E = \mathbf{R}_2[X]); \qquad \mathcal{V}_4 = ((X+1)^n)_{n\in\mathbf{N}} \quad (E = \mathbf{R}[X]).$$

2. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit l'application $e_\alpha \colon t \mapsto e^{\alpha t}$. Montrer que la famille $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{R}}$ est une famille libre de $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (indication : considérer une combinaison linéaire des e_α et en déterminer un équivalent pour $t \to +\infty$). Est-elle génératrice ?

3. Dans $E = \mathbf{K}_3[X]$, on considère $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$.

(1) Vérifier que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.

(2) Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$.

(3) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

4. Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes.

(1) Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

(2) Soient F l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0, et G l'ensemble des suites réelles constantes.

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

(b) Montrer que $E = F \oplus G$.

5. Dans $E = \mathbf{R}^3$, on note $F = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)$ et $G = \{(x, y, z) \mid 2x - y + z = 0\}$.

(1) Montrer que $E = F \oplus G$.

(2) Déterminer les matrices respectives (dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$) de la projection sur F parallèlement à G, et de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

6. Montrer qu'une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

Matrices

7. Soit $n \in \mathbf{N}$. On note respectivement $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de taille n à coefficients dans $\mathbf{K}$.

(1) Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et donner leurs dimensions.

(2) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par $f(M) = A^T M + MA$.

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) On note F l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n. Montrer que le sous-espace F est stable par f.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ antisymétrique.

(1) Soit $X \in \mathbf{R}^n$ tel que $MX = -X$. En calculant $(MX)^T X$ de deux manières différentes, montrer que $X^T X = 0$. En déduire que $X = 0$.

(2) En déduire que la matrice $I_n + M$ est inversible.

10. Soit $n \in \mathbf{N}$. Existe-t-il deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

11. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Expliquer pourquoi l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont la trace est nulle est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Déterminer une droite supplémentaire de cet hyperplan. Proposer une base de cet hyperplan.

Déterminants

12. Soient $a, b, c \in \mathbf{C}$. Calculer les déterminants suivants :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}; \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}; \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad d_6 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$d_8 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; \quad d_9 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad d_{10} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$d_{11} = \begin{vmatrix} 10 & 5 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad d_{12} = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}; \quad d_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

13. ($\star$) Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $a, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. Calculer les déterminants suivants, de taille n :

$$d_{14} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}; \quad d_{15} = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$d_{16} = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}.$$

Solutions. $d_1 = 116$; $d_2 = -18$; $d_3 = 6$; $d_4 = 14$; $d_5 = 96$; $d_6 = -1$; $d_7 = -12$; $d_8 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$; $d_9 = -1$; $d_{10} = -16$; $d_{11} = 7\,700$; $d_{12} = b^2c^2 - 4a^2bc$; $d_{13} = 4a^3 + 27b^2$; $d_{14} = (-1)^{n+1}a_1(a_2 - a_1)^{n-1}$; $d_{15} = 1 + (-1)^{n+1}$; $d_{16} = (na + b)b^{n-1}$.