

CONVERGENCE, DIVERGENCE, SOMME

1. Montrer la convergence et calculer la somme des séries :

$$\sum \frac{1}{n^2 - 1}; \quad \sum \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad \sum \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \quad \sum \frac{1}{5^n}; \quad \sum \frac{2^n}{3^{n-2}}.$$

2. Écrire en Python une fonction **Somme(N)** calculant les sommes partielles d'une série (on suppose qu'on a déjà écrit une fonction **u(n)** calculant le terme général). En supposant la série convergente, comment obtenir une estimation de sa somme ? de ses restes ?

3. Soit $x \in]-1; 1[$. Justifier la convergence, puis calculer la somme de la série $\sum nx^n$ (indication : on pourra étudier les fonctions $f_N: x \mapsto \sum_{n=0}^N x^n$).

4. On admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. Prouver la convergence et déterminer la somme des séries

$$\sum \frac{n+1}{n!}; \quad \sum \frac{n^2-2}{n!}; \quad \sum \frac{n^3}{n!}.$$

SÉRIES À TERMES POSITIFS

5. Donner la nature des séries suivantes :

$$\begin{aligned} &\sum \frac{n}{n^2+1}; \quad \sum n^2 e^{-n}; \quad \sum \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}; \quad \sum \cos \frac{1}{n^2}; \quad \sum \sin \frac{1}{n^2}; \\ &\sum \frac{n^2+1}{n^2}; \quad \sum \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}; \quad \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \quad \sum \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right); \quad \sum \ln(1+e^{-n}); \\ &\sum \frac{1}{\ln n}; \quad \sum \ln \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right); \quad \sum \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right); \quad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}. \end{aligned}$$

6. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer la convergence et calculer la somme de

$$\sum \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

7. **Séries de Bertrand.** Le but de cet exercice est de donner un critère général de convergence pour les séries de la forme

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

(1) Montrer que la série converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

(2) Dans cette question, on suppose $\alpha = 1$.

(a) Montrer que la série est divergente si $\beta \leq 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$, on pose

$$T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée si $\beta > 1$ et tend vers l'infini si $\beta \leq 1$.

(c) Conclure.

8. Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries, *pas nécessairement à termes positifs*. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes. On suppose de plus que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $\sum v_n$ est convergente.

9. Justifier la convergence et donner la somme de la série

$$\sum \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$$

AUTRES

10. Critère spécial des séries alternées. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que :

- $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est alternée, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbf{N} \quad (-1)^n u_n \geq 0$;
- $(|u_n|)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante ;
- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- (1) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes.
- (2) En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.
- (3) **Application.** Montrer que les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$ sont convergentes.

11. Contre-exemple pour le théorème de comparaison. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

- (1) Montrer que $u_n \sim v_n$.
- (2) Montrer que $\sum u_n$ converge (on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent).
- (3) Montrer que $\sum v_n$ diverge. Qu'en conclure ?

12. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbf{R}$ la série de terme général $\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer alors la somme de la série.

★ ★
★