

ÉTUDES LOCALES

1. Soient $F: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ de classe C^∞ et $a \in I$. Soit $p = \min\{k \in \mathbf{N}^* \mid F^{(k)}(a) \neq 0\}$. Exprimer à l'aide de $F^{(p)}(a)$ un paramétrage, puis une équation cartésienne de la tangente à l'arc paramétré par F au point de paramètre $t = a$.

2. Dessiner l'allure des arcs paramétrés suivants au voisinage du point de paramètre $t = 0$:

- (1) $x(t) = t + 2t^2 - t^3, y(t) = t + 2t^2 - t^7$;
- (2) $x(t) = -t + t^2, y(t) = t^2 + t^3$;
- (3) $x(t) = -t^2 - 2t^3, y(t) = -t^3 - t^5$;
- (4) $x(t) = t^2 + 3t^3 + t^4, y(t) = -2t^2 - 6t^3 + t^4$.

3. Montrer que la courbe paramétrée $\mathcal{C}: \begin{cases} x = 2t - \frac{1}{t^2} \\ y = 2t + t^2 \end{cases}$ admet un point double (c'est-à-dire qu'il existe deux instants $t_1 \neq t_2$ tels que $M(t_1) = M(t_2)$) et en donner les coordonnées.

4. On considère un arc paramétré dont le tableau de variation des fonctions coordonnées est :

t	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x'(t)$	0	+		+
$x(t)$	1	$\nearrow +\infty$	$\parallel -\infty$	$\nearrow 0$
$y(t)$	0	$\nearrow 1$	$\nearrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow -\infty$
$y'(t)$	0	+	0	-

À la lecture de ce tableau, déterminer les points stationnaires, les tangentes horizontales ou verticales, les éventuelles asymptotes, puis proposer un tracé de courbe pouvant correspondre à ce tableau.

ÉTUDES COMPLÈTES

5. Tracer les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}: \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} & \quad (\text{cycloïde}) \\ \mathcal{C}: \begin{cases} x = \cos t (1 + \cos t) \\ y = \sin t (1 + \cos t) \end{cases} & \quad (\text{cardioïde}) \\ \mathcal{C}: \begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases} & \quad (\text{folium de Descartes}) \\ \mathcal{C}: \begin{cases} x = \frac{t+t^3}{1+t^4} \\ y = \frac{t-t^3}{1+t^4} \end{cases} & \quad (\text{lemniscate de Bernoulli}) \\ \mathcal{C}: \begin{cases} x = 3 \cos t - \cos(3t) \\ y = 3 \sin t - \sin(3t) \end{cases} & \quad (\text{néphroïde}) \end{aligned}$$

LONGUEUR D'ARC

6. Déterminer la longueur des courbes suivantes :

- (1) la cardioïde;
- (2) une « arche » de la cycloïde;
- (3) la « feuille » du folium de Descartes (l'exprimer sous la forme d'une intégrale).