Valeurs propres, vecteurs propres

1. Dans chacun des cas suivants, dire si λ est une valeur propre de A (resp. u). Le cas échéant, déterminer le sous-espace propre correspondant.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = \pm 2$.

(3) $u\colon \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$, $P \mapsto P'$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

(4) $u\colon \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$, $P \mapsto XP'$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, on considère $D\colon f \mapsto f'$. Justifier que D est un endomorphisme et déterminer son spectre.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr}(A) + \det(A)$.

Diagonalisation

4. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables ; donner leur diagonalisation le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Discuter suivant les valeurs de $a, b, c \in \mathbf{C}$ la diagonalisabilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

6. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres ; en déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une matrice $Z \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ telle que $Z^2 = A$.

8. Dans $E = \mathbf{K}_n[X]$, on considère l'endomorphisme u défini par $u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'$.

(1) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de E.

(2) Montrer que u est diagonalisable.

(3) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice possédant une unique valeur propre. À quelle condition est-elle diagonalisable ?

10. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, de rang 1.

(1) Montrer que $\operatorname{Tr}(f) \in \operatorname{Sp}(f)$.

(2) En déduire que f est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.

11. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On considère l'endomorphisme u de E défini par
$$u\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(1) Construire une base de E constituée de vecteurs propres pour u.

(2) En déduire le polynôme caractéristique de u.

Trigonalisation

12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable, et qu'elle est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Applications

14. Déterminer les suites vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\begin{cases} u_0 = 1;\ u_1 = 2; \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_0 = -1;\ u_1 = 0; \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_0 = 1;\ u_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$

15. On considère le système de suites récurrentes
$$\begin{cases} p_n = q_{n-1} + r_{n-1} \\ q_n = p_{n-1} + r_{n-1} \\ r_n = p_{n-1} + q_{n-1} \end{cases}$$
avec les conditions initiales $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.

(1) On pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donner une matrice A telle que l'équation matricielle $X_{n+1} = AX_n$ soit satisfaite pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(2) Diagonaliser A.

(3) En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(4) Donner l'expression de p_n, q_n et r_n en fonction de n.

16. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(2) Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 4$, $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n \\ w_{n+1} = -4u_n + 4v_n + 3w_n. \end{cases}$$
Déterminer l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.