1. Justifier la convergence et calculer les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}; \qquad \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t.$$

2. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^1 \frac{t^2+1}{t}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos t}}{t}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t+t^2e^{-t}}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}; \qquad \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t\ln(2+t^2)}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,\sin(\frac{1}{t^2})}{\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

3.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

(2) Calculer cette intégrale à l'aide du changement de variables $t = \tan\theta$.

4.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{4t}{t^4-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

(2) Vérifier que, pour tout $t > 2$,

$$\frac{4t}{t^4-1} = \frac{-2t}{t^2+1} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}.$$

(3) En déduire la valeur de l'intégrale.

5. On considère $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que I est convergente.

(2) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

(3) Montrer que $2I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t$.

(4) En déduire la valeur de I.

6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbf{R}$ pour que l'intégrale impropre ci-dessous soit convergente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

7. On considère la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+8x+20}$.

(1) Pourquoi la fonction f est-elle définie et continue sur $\mathbf{R}$?

(2) Prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.

(3) Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+8x+20)^2}$ est convergente.

8.

(1) Pour tout $x > 0$, montrer que l'intégrale suivante est convergente :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(2) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(3) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

9. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. On veut étudier la nature de l'*intégrale de Bertrand*

$$\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}.$$

(1) On suppose $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe $\gamma > 1$ tel que $\dfrac{t^\gamma}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \longrightarrow 0$ pour $t \to +\infty$. En déduire la convergence de l'intégrale.

(2) On suppose $\alpha = 1$. Soit $x > e$. Calculer $\displaystyle\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$, puis déterminer pour quels $\beta \in \mathbf{R}$ l'intégrale étudiée converge.

(3) On suppose enfin $\alpha < 1$. Déterminer la limite de $\frac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ lorsque $t \to +\infty$; en déduire la nature de l'intégrale étudiée.

10. Dire si les intégrales suivantes sont absolument convergentes :

$$\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x; \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t;$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}(2+3\cos^9 x)\,\mathrm{d}x; \qquad \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

11.

(1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(2) À l'aide d'un changement de variables simple, montrer qu'il s'agit en fait d'une intégrale nulle.

(3) En déduire que, pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln a}{2a}.$$

12. Discuter, suivant les valeurs du paramètres $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t; \qquad \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x+e^{\alpha x}\right)\,\mathrm{d}x;$$

$$\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\right)\,\mathrm{d}x \quad (\alpha \in [-4 : +\infty[)$$