

## ÉVÉNEMENTS SUR UN UNIVERS DÉNOMBRABLE

1. On effectue une suite infinie de lancers de dé. Pour tout  $i \in \mathbf{N}^*$ , on note  $A_i$  l'événement « on obtient un 6 au  $i$ -ème lancer ».

- (1) Définir par une phrase ne contenant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements suivants :

$$E_1 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i; \quad E_2 = \left( \bigcap_{i=1}^3 \bar{A}_i \right) \cap \left( \bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i \right); \quad E_3 = \bigcup_{i=4}^{+\infty} A_i.$$

- (2) Écrire à l'aide des  $A_i$  l'événement « on obtient au moins une fois un 6 au-delà du  $n$ -ème lancer ».

- (3) Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note  $C_n = \bigcup_{i=n+1}^{+\infty} A_i$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $C_{n+1} \subset C_n$ .

Définir par une phrase ne contenant aucun vocabulaire mathématique l'événement  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$ .

- (4) Décrire à l'aide des  $A_i$  les événements :

- $B_n$  : « on n'obtient plus que des 6 à partir du  $n$ -ème lancer » ;
- $B$  : « il existe un lancer à partir duquel on n'obtient plus que des 6 ».

2. On effectue une série de lancers d'un dé à six faces équilibré.

- (1) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?
- (2) Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note  $A_n$  l'événement « le rang d'apparition du premier 6 est  $n$ , et tous les lancers qui le précèdent sont pairs ». Déterminer  $\mathbf{P}(A_n)$ .
- (3) On note  $A$  l'événement « tous les lancers qui précèdent le premier 6 sont pairs ». Exprimer  $A$  en fonction des  $A_n$  et en déduire  $\mathbf{P}(A)$ .

3. Ada et Benoît s'affrontent aux tirs au but, en tirant chacun-e leur tour : d'abord Ada, puis Benoît, puis de nouveau Ada, etc., jusqu'à ce qu'un des tirs soit réussi, auquel cas son auteur-e est déclaré-e gagnant-e. Ada réussit en moyenne ses tirs une fois sur trois, et Benoît une fois sur deux. Qui a le plus de chances de gagner ?

4. On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'avoir « pile » est  $p \in ]0; 1[$  et la probabilité d'avoir « face »  $q = 1 - p$ .

- (1) Pour tout  $n \geq 2$ , on considère l'événement  $A_n$  : « la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers  $n - 1$  et  $n$  ». Calculer  $\mathbf{P}(A_n)$ .
- (2) On note  $A$  l'événement « la séquence PF apparaît au moins une fois ». Calculer  $\mathbf{P}(A)$ . Que remarque-t-on ?
- (3) On note  $B$  l'événement « la séquence PP apparaît sans avoir été précédée par une séquence PF ». Calculer  $\mathbf{P}(B)$ .

## VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

5.

- (1) Déterminer trois réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} + \frac{\gamma}{k+2}.$$

- (2) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$  et, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}.$$

Déterminer  $a$ .

- (3) La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance? une variance? Les calculer le cas échéant.

**6.** Dans une urne contenant au départ une boule verte et une boule rouge, on effectue une suite de tirages d'une boule selon la procédure suivante :

- si une boule verte est tirée, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule rouge ;
- si une boule rouge est tirée, on arrête les tirages.

On note  $X$  le nombre de tirages effectués (convention :  $X = 0$  si on ne s'arrête jamais de tirer). Pour tout  $i \in \mathbf{N}^*$ , on définit les événements  $V_i$  et  $R_i$  : « la  $i$ -ème boule tirée est verte (resp. rouge) ».

- (1) Pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , exprimer l'événement  $(X = k)$  à l'aide des  $V_i$  et de  $R_k$ .
- (2) Que vaut  $\mathbf{P}_{V_1 \cap \dots \cap V_{k-1}}(V_k)$  ?
- (3) Déterminer la loi de  $X$ .
- (4) Calculer l'espérance de  $X$  et celle de  $\frac{1}{X}$ .
- (5) On modifie le protocole expérimental de la façon suivante :  
« si une boule verte est tirée, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule *verte* ».  
On note  $Y$  le nombre de tirages dans cette nouvelle expérience (avec la même convention). Déterminer la loi de  $Y$ . Que peut-on dire de son espérance? Interpréter.

**7.** Un livre de 500 pages contient  $n$  erreurs typographiques réparties au hasard. On suppose  $n$  supérieur ou égal à 100 mais inférieur au nombre de caractères pouvant tenir sur une page.

- (1) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y_0$  égale au nombre d'erreurs typographiques sur une page. On fera intervenir le nombre  $m$  total de caractères sur cette page. Par quelle loi peut-on l'approcher?  
Dans toute la suite, on travaillera à partir de la loi approchée.
- (2) On effectue des relectures successives du livre avant de le publier. À chaque lecture, une erreur qui n'a pas encore été corrigée est repérée (et donc corrigée) avec probabilité  $\frac{1}{3}$ . On note  $Y_i$  le nombre d'erreurs restant sur une page après  $i$  relectures. Déterminer, pour tous  $(j, k) \in \mathbf{N}^2$ , la probabilité  $\mathbf{P}(Y_i = j \mid Y_0 = k)$ .
- (3) En déduire la loi de  $Y_1$ , puis celle de  $Y_i$  pour tout  $i \geq 1$ .

**8.** Une entreprise dispose d'une flotte de 1 000 véhicules. Elle estime que, chaque jour, la probabilité qu'un véhicule ait un accident est de 4‰. On suppose les accidents indépendants, on néglige la probabilité qu'un véhicule ait plusieurs accidents la même journée, et on note  $N$  la variable aléatoire correspondant au nombre de véhicules de la société accidentés en une journée.

- (1) Quelle est la loi de probabilité exacte de  $N$ ? En déduire  $\mathbf{E}(N)$  et  $\mathbf{V}(N)$ .
- (2) Donner une loi de probabilité permettant d'approcher la loi de  $N$ . Justifier.
- (3) À l'aide de cette approximation :
  - (a) Calculer la probabilité que la flotte connaisse 4 accidents en une journée.
  - (b) Calculer la probabilité pour que le nombre d'accidents en une journée soit au plus égal à 5, sachant qu'il est au moins égal à 2.
  - (c) Déterminer le plus petit entier  $k$  tel que  $\mathbf{P}(N > k) \leq 0,01$ .

**9.** (★) Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur le même univers. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+^*$ . Déterminer la loi de probabilité de  $X + Y$ .