Convergence

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$S_1\colon \sum \frac{z^n}{\sqrt{n}};\qquad S_2\colon \sum \frac{n!}{(2n)!}z^n;\qquad S_3\colon \sum (\ln n)z^n;\qquad S_4\colon \sum n^3 n! z^n$$

$$S_5\colon \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n;\qquad S_6\colon \sum \frac{\ln n}{\ln(n+1)}z^n;\qquad S_7\colon \sum (1+i)^n z^n;\qquad S_8\colon \sum \frac{(-2)^n}{n+1}z^{3n+1};$$

$$S_9\colon \sum \frac{n^2+1}{3^n}z^n;\qquad S_{10}\colon \sum \frac{\ln n}{n^2}z^n;\qquad S_{11}\colon \sum \frac{\ln n}{n^2}z^{2n}.$$

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel $\ell \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$S_1\colon \sum a_n z^{3n};\qquad S_2\colon \sum a_n 3^n z^{2n}.$$

Somme d'une série entière

4. Déterminer le rayon de convergence, puis exprimer à l'aide des fonctions usuelles la somme des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n-1}{n}x^n;\qquad \sum \frac{n+2}{n+1}x^n;\qquad \sum \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n;\qquad \sum \frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n}.$$

5. Montrer la convergence et déterminer la somme des séries numériques suivantes :

$$\sum \frac{1}{2^n n!};\qquad \sum \frac{n}{2^n};\qquad \sum \frac{n^2}{2^n};\qquad \sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)}.$$

Développement en série entière

6. Développer en série entière les fonctions suivantes (préciser le rayon de convergence) :

$$f_1\colon x\mapsto \ln(1+2x^2);\quad f_2\colon x\mapsto \frac{1}{a-x}\ (a\neq 0);\qquad f_3\colon x\mapsto \frac{e^x}{1-x};$$

$$f_4\colon x\mapsto \arctan(x+1);\qquad f_5\colon x\mapsto (4+x^2)^{-3/2}.$$

7. Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\colon xy''+2y'-xy=0\qquad (E_2)\colon x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0;$$

$$(E_3)\colon \begin{cases} y''+xy'+y=1\\ y(0)=y'(0)=1\end{cases};\qquad (E_4)\colon x(x-1)y''+3xy'+y=0.$$

8. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$f_1\colon x\mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 1 \text{ sinon;}\end{cases}\qquad f_2\colon x\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} \text{ si } 0<|x|<\pi\\ 0 \text{ si } x=0.\end{cases}$$

9. On considère la fonction $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

(1) Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x\neq 0$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}.$$

(2) En déduire que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $f^{(n)}(0)=0$. Quelle est la série de Taylor de f ?

(3) Montrer que f n'est pas développable en série entière en 0.