1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels, en donner la dimension ainsi qu'une base (si la dimension est finie).

(1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$;
(2) $F = \{(z, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 2y = 4z\}$;
(3) $F = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(0) = P(2)\}$;
(4) $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A^T = A\}$.

2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On considère l'application $u\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ définie par $u(x, y, z, t) = (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z)$.

(1) Montrer que u est une application linéaire.

(2) Déterminer son noyau et son image.

3. On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{R}_3[X]$ défini par $u(P) = (1 - X^2)P'' - XP'$.

(1) Vérifier que u est bien défini.

(2) Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.

(3) Donner des bases du noyau et de l'image de u.

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Donner une base du noyau et de l'image de f.

(2) Sans faire aucun calcul, en déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.

(2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$ (on pourra écrire A sous la forme $A = I_3 + N$).

7. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on rappelle que $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec $f^0 = \mathrm{id}_E$ par convention ; et on note $N_k = \ker f^k$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

(1) Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer que $N_k \subset N_{k+1}$. Montrer que, si $N_k = N_{k+1}$, alors $N_{k+1} = N_{k+2}$.

(2) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $N_k = N_{k+1}$. On pourra par exemple considérer la suite des dimensions des N_k.

(3) Soit p le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

8. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $(1, 2, 2)$ est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre correspondante.

(2) Montrer que -1 est valeur propre de A et calculer le sous-espace propre correspondant.

(3) En déduire que A est diagonalisable *sans calculer son polynôme caractéristique.*

9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

(1) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres de A.

(2) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que, si $AM = MA$, alors tout vecteur propre de A est vecteur propre de M.

(3) Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $M^2 = A$.

10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(2) Montrer que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Dans $E = \mathbf{R}^3$, on considère $F = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.

(1) Montrer que $E = F \oplus G$.

(2) Donner l'expression de la projection sur F parallèlement à G.

(3) Donner l'expression de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

12. Soient p et q deux projecteurs d'un même espace vectoriel E, vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

(1) Montrer que $p \circ q$ est aussi un projecteur.

(2) Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \circ \mathrm{Im}(q)$.

(3) Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

13. Dans $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice de la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperlan H d'équation $x - y - z + t = 0$.

14. Déterminer la nature géométrique des endomorphismes canoniquement associés à :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}; \qquad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

15. Soit $A \in \mathcal{M}_3(R)$. On note $(C_i)_{1 \leq i \leq 3}$ ses vecteurs colonnes.

(1) Montrer que $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ si et seulement si $\begin{cases} \|C_1\| = \|C_2\| = 1 \\ \langle C_1, C_2 \rangle = 0 \\ C_1 \wedge C_2 = C_3 \end{cases}$

(2) Donner un critère analogue pour que A soit une matrice orthogonale indirecte.

16. Montrer que l'application définie sur $\mathcal{C}_1([0,1], \mathbf{R})$ de la manière suivante est un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

17.

(1) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer que la série de terme général $\frac{P(n)}{2^n}$ est convergente.

(2) Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{2^n}.$$

18. Déterminer des réels $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ de manière à minimiser l'intégrale :

$$\delta(a,b,c) = \int_{-1}^{1} (e^t - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t.$$