1. On considère la fonction $f: [1; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = e^{1/x} \sqrt{x^2 - 1}$.

(1) Montrer que, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

(2) En déduire que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$.

(3) Quelle est la position de cette asymptote par rapport au graphe de f au voisinage de $+\infty$?

2. Calculer les intégrales suivantes. On pourra, le cas échéant, faire appel au changement de variables indiqué entre parenthèses.

(1) $\int_0^1 x e^{1+x^2} dx;$

(4) $\int_0^\pi (\sin x)^5 \cos x dx;$

(7) $\int_{\pi/5}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ ($u = \sin x$);

(2) $\int_{-1}^1 \frac{3}{2x+4} dx;$

(5) $\int_0^1 \frac{9x^2 - 6}{x^3 - 2x + 5} dx;$

(8) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ ($u = \sqrt{x}$);

(3) $\int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt;$

(6) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx;$

(9) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x}$ ($u = \tan \frac{x}{2}$)

3. Donner la nature des séries et intégrales suivantes :

(1) $\sum \frac{n+1}{n^3-7}$

(5) $\sum \frac{2^n}{n!};$

(9) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t};$

(2) $\sum \frac{2^n + 3^n}{n^2 + 5^n}$

(6) $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2};$

(10) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x \ln(2+x^2)} dx;$

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln(1+\sqrt{x})};$

(7) $\int_0^{+\infty} (x - \sqrt{1+x^2}) dx;$

(11) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right);$

(4) $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) dx;$

(8) $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right);$

(12) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt.$

4. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+3)! z^n;$

(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2n^3+5} z^n;$

(5) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1};$

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n;$

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) z^n;$

(6) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n;$

5. Donner le rayon de convergence, puis calculer la somme des séries entières :

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n;$

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n;$

(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n.$

6. Donner le développement en série entière des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \frac{1}{x-5};$

(3) $x \mapsto \frac{1}{(2+x)^3};$

(5) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

(2) $x \mapsto \frac{1}{1+9x^2};$

(4) $x \mapsto \ln(5-x);$

(6) $x \mapsto \ln(1+x+x^2).$

7. On considère la fonction 2π -périodique définie sur $]-\pi; \pi]$ par $f(x) = e^x$.

(1) Représenter graphiquement cette fonction.

(2) Calculer les coefficients de Fourier de f .

(3) Étudier la convergence de la série de Fourier de f .

(4) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

8. Soit f la fonction paire, 2π -périodique et définie sur $]0; \pi[$ par $f(x) = x$. Calculer la série de Fourier de f , puis en déduire les valeurs des sommes des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}; \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}; \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

9. Le but de cet exercice est de montrer que la série de terme général $\frac{\sin n}{n}$ est convergente.

(1) Montrer qu'il suffit d'établir la convergence de la série complexe de terme général $\frac{e^{in}}{n}$.

(2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$E_n = \sum_{k=0}^n e^{ik}.$$

Montrer que la suite $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.

(3) Montrer que, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{in}}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} E_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{E_N}{N} - 1.$$

(4) Étudier la convergence de la série de terme général $E_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.

(5) Conclure.

10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^2 + 2)$.

(1) Montrer que $u_n \geq 3$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.

(3) On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge. Quelles peuvent être les valeurs possibles de sa limite ?

(4) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

11. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ donnée par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{18u_n u_{n+1}}{3u_n + u_{n+1}}.$$

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.

(2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(b) En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(c) Discuter la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

12. Déterminer la solution y définie sur $]0; +\infty[$ du problème suivant :

$$\begin{cases} xy' + y = \frac{2x}{x^2 + 1}; \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

13. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :

$$y'' - 2y' + 5y = x^2 e^x$$

14. Résoudre sur $] -1; 1[$ l'équation différentielle :

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - 4y = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variables $x = \cos \theta$.

15. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle :

$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0.$$

On pourra rechercher les solutions développables en série entière.