

1.

- (1) Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées du nombre complexe $3 - 4i$.
- (2) Résoudre sur $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 - iz - 1 + i = 0$.
- (3) Rappeler quelles sont les racines troisièmes de l'unité.
- (4) Écrire $-1 + i$ sous forme trigonométrique.
- (5) Résoudre l'équation $z^3 = -1 + i$.
- (6) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 - iz^3 - 1 + i = 0$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d \in \mathbf{K}[X]$, on note $P(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_dA^d \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si $P(A) = 0$, on dit que P est un *polynôme annulateur* de A .

- (1) Montrer que les valeurs propres de A sont nécessairement des racines de tous les polynômes annulateurs de A .
- (2) Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres d'un projecteur et d'une symétrie?

3. Soit $x > -1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

5. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|\sin(n\alpha)| \leq n|\sin \alpha|$.

6. Calculer les limites suivantes :

- | | |
|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$; | (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$; |
| (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$; | (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$, $a \in \mathbf{R}^*$; |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$; | (7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$; |
| (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$; | (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\sqrt{x}}$. |

7. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct.

- (1) Donner une équation cartésienne du plan paramétré par

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2u \\ y = 2 + t + u \\ z = 3u \end{cases} \quad (t, u) \in \mathbf{R}^2$$

- (2) Donner un paramétrage du plan d'équation cartésienne $x + 2y - z - 3 = 0$.
- (3) Donner un système d'équations cartésiennes définissant la droite paramétrée par

$$\begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = 3t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

- (4) Donner un paramétrage de la droite dont un système d'équation cartésiennes est

$$\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

8. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, déterminer le projeté orthogonal H du point $M(u, v, w)$ sur le plan $\mathcal{P}$ passant par les trois points $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 5)$ et $C(2, 3, 4)$.

9. Étudier la convergence et calculer la somme de $\sum \frac{n^2 + 1}{2^n(n+2)!}$.