1. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose
$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t - 2(\cos t)^3 \\ y(t) = 2(\sin t)^3 \end{cases}$$
On s'intéresse à la courbe Γ tracée dans le plan (muni d'un repère orthonormé direct) par le déplacement du point mobile $P(x(t), y(t))$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

(1) (a) Montrer que les fonctions x et y sont périodiques et préciser leurs périodes.

(b) Étudier la parité des fonctions x et y.

(c) En déduire un intervalle $I = [0, \alpha]$ le plus petit possible sur lequel effectuer l'étude de la courbe Γ, en précisant comment en déduire le tracé du reste de la courbe.

(2) Dresser le tableau de variations conjoint des fonctions x et y sur I. On fera apparaître notamment les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$.

(3) À l'aide des développements limités des fonctions x et y au voisinage de $t = 0$, justifier que la tangente à Γ au point $P(0)$ est horizontale.

(4) Tracer la courbe Γ, en faisant notamment apparaître pour $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ les points $P(t)$ et les tangentes en ces points.

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne
$$z = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y.$$
On note, pour tous $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y$.

(1) Pour tous $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, comparer $f(x, y)$ et $f(y, x)$. En déduire que la surface $\mathcal{S}$ possède un plan de symétrie dont on donnera une équation cartésienne.

(2) (a) Calculer le gradient de f.

(b) Montrer que, si (x, y) est un point critique de f, alors $x = \pm y$ (on pourra remarquer que, dans ce cas, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$).

(c) En déduire que f admet quatre points critiques et donner leurs coordonnées.

(3) (a) Justifier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

(b) Pour tous $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, calculer $r(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $t(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(c) Remplir le tableau suivant et en déduire la nature des quatre points critiques (maximum, minimum ou point col) :

	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
r				
s				
t				
$rt - s^2$				