1. On lance une pièce qui a la probabilité $\frac{2}{3}$ de faire pile. Les lancers sont supposés indépendants. On note X le nombre de lancers nécessaires afin d'avoir pour la première fois deux piles consécutifs, et $p_n = \mathbf{P}(X = n)$.

(1) Déterminer p_2, p_3 et p_4.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.

(3) En déduire une expression explicite de p_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

(4) Combien d'essais faut-il faire en moyenne pour obtenir deux piles consécutifs ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}_3(\mathbf{R})$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}).$$

On définit également $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}((1, 0, 1))$.

(1) Montrer que $\mathbf{R}^3 = H \oplus D$.

(2) Montrer que H et D sont stables par u.

(3) Écrire la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus.

3. Déterminer les extrema de $f\colon D \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$, où $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

4. Dans $E = \mathbf{R}_2[X]$, on définit $\varphi\colon E^2 \to \mathbf{R}$ par :

$$\forall\, P, Q \in E \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k).$$

On considère également les ensembles :

$$F = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \left\{P \in \mathbf{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

(1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

(2) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

(3) Déterminer une base de F et une base de G.

(4) Déterminer l'orthogonal de F et l'orthogonal de G.

(5) Montrer que $\mathcal{B} = (X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ est une base orthogonale de E ; en déduire une base orthonormée de E.

5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et que $I_0 = 1$.

(2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $A \geq 0$, montrer que :

$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(3) En déduire que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.