TSI2 **Mathématiques – Devoir surveillé n°1** 2024-25

Samedi 7 septembre 2024 – Durée : 3h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Problème I

Dans ce problème, on étudie les *fonctions trigonométriques hyperboliques* sh et ch, définies sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Étude de fonctions.

Q1. (a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.

(b) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables et que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{ch}'(t) = \mathrm{sh}(t)$ et $\mathrm{sh}'(t) = \mathrm{ch}(t)$.

(c) Dériver la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(t) = (\mathrm{ch}(t))^2 - (\mathrm{sh}(t))^2$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. En déduire une relation entre $(\mathrm{ch}(t))^2$ et $(\mathrm{sh}(t))^2$.

Q2. Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de ch et sh en 0.

Q3. (a) En se basant sur les variations de sh, montrer que l'équation $\mathrm{sh}(t) = 1$, d'inconnue t, admet une unique solution réelle, que l'on notera dans la suite α.

(b) On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

(c) En déduire la valeur exacte de α.

(d) Montrer que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Q4. Montrer que $\mathrm{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$.

Suite d'intégrales. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha (\mathrm{sh}(t))^{2n}\,\mathrm{d}t$ (le nombre $\alpha \in [0;1]$ étant défini dans la partie précédente).

Q5. Montrer que $I_0 = \alpha$.

Q6. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et strictement positive (*indication : on pourra remarquer que, pour tout* $t \in [0;\alpha]$, *on a* $0 \leq \mathrm{sh}(t) \leq 1$). En déduire qu'elle est convergente.

Q7. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_{n+1} = \mathrm{ch}(\alpha) - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$$

(*indication : on pourra remarquer que* $(\mathrm{sh}(t))^{2n+2} = (\mathrm{sh}(t))^{2n+1} \times \mathrm{sh}(t)$)

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

(c) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

(d'après ATS 2019)

Problème II

Soient m et n deux entiers naturels, avec $2 \leq m \leq n$. On considère deux dés équilibrés, l'un à m et l'autre à n faces, numérotées respectivement de 1 à m et de 1 à n.

Q1. On lance le dé à n faces et on note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Rappeler la loi de X, son espérance et sa variance.

On considère maintenant le jeu suivant : on lance le dé à m faces, et on gagne un nombre de points égal au résultat de ce dé. Cependant, si le dé tombe sur sa face la plus élevée, il « explose » ; on peut alors lancer le dé à n faces et ajouter son résultat au total des points gagnés.

Exemples avec $m = 4$ et $n = 6$:

- Alex lance le dé à 4 faces et obtient 2. Total : 2 points gagnés.
- Ify lance le dé à 4 faces et obtient 4 : le dé « explose », Ify peut lancer le dé à 6 faces, il obtient 3. Total : $4 + 3 = 7$ points gagnés.

Q2. On note X_1 le résultat du dé à m faces et X_2 le résultat du dé à n faces, avec la convention que $X_2 = 0$ si ce dé n'est pas lancé. On note Y le nombre total de points obtenus ; on peut remarquer que $Y = X_1 + X_2$.

(a) Donner l'univers-image $Y(\Omega)$ de Y.

(b) Pour tout $y \in [\![1; m-1]\!]$, donner $\mathbf{P}(Y = y)$.

(c) Pour tout $y \in [\![m+1; m+n]\!]$, donner la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(Y = y \mid X_1 = m)$, puis en déduire $\mathbf{P}(Y = y)$.

(d) Que dire de $\mathbf{P}(Y = m)$?

Q3. Vérifier que $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{n}{m} + \frac{1}{m} + 1\right)$.

On laisse maintenant aux joueuses le choix :

- soit lancer le dé à m faces, avec la possibilité que celui-ci « explose » comme décrit ci-dessus ;
- soit lancer uniquement le dé à n faces.

On se demande, en fonction des valeurs de m et n, laquelle des deux options est la plus avantageuse. Il s'agit d'étudier, en fonction de m et n, le signe de la quantité :

$$D_{m,n} = \mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X) = \frac{1}{2}\left(m - n + \frac{n}{m} + \frac{1}{m}\right).$$

Fixons m et étudions la quantité $D_{m,n}$ comme une suite de la variable n ; dans la suite, on l'écrira simplement D_n pour alléger la notation.

Q4. Vérifier que $(D_n)_{n \geq m}$ est une suite arithmétique ; donner sa raison et en déduire ses variations.

Q5. Montrer que $D_n \geq 0 \iff n \leq \frac{m^2+1}{m-1}$.

Q6. Vérifier que $\frac{m^2+1}{m-1} \geq m+1$ pour tout $m \geq 2$. En déduire la stratégie optimale dans le cas où $n = m + 1$.

Q7. Montrer que, si $m > 3$, alors $\frac{m^2+1}{m-1} < m + 2$. En déduire la stratégie dans le cas où $m > 3$ et $n \geq m + 2$.

Q8. Calculer $\frac{m^2+1}{m-1}$ dans le cas où $m = 2$ ou 3. En déduire la stratégie optimale dans ce cas.

(d'après Mulligan et al., *Never stop blowing up* (2024))

Problème III

On considère la fonction $f\colon \mathbf{C} \setminus \{-1\} \to \mathbf{C}$ définie par :

$$\forall\, z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\} \quad f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Les parties A et B de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Lieux de points. *Les trois questions de cette partie peuvent être traitées de manière indépendante.*

Q1. Soient les trois nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \frac{-3+i2\sqrt{3}}{3}$. Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrer que les points A, B, C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral.

Q2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.

Q3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 2$.

III.A. Partie B – Étude d'une suite récurrente.

Q4. (a) Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution ; puis montrer que, pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution que l'on exprimera en fonction de ω.

(b) La fonction f est-elle injective ? surjective ?

(c) Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a $f(z) \in \mathbf{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbf{C} \setminus \{-1; 0; 1\} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Q5. (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.

(b) Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si $u_0 \in \{-i; i\}$?

(c) Montrer que si $u_0 \notin \{-i; i\}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \notin \{-i; i\}$.

On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbf{C} \setminus \{-1; 0; 1; -i; i\}$ et on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\ v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}.$$

D'après la question précédente, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie puisque $u_0 \neq -i$ donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq -i$.

Q6. (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $-i$.

(b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique de période 4 (c'est-à-dire que $v_{n+4} = v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$) et que ses termes sont les affixes d'un carré.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est également périodique de période 4.

(d'après ATS 2020)