

PROBLÈME I

Étude de fonctions.

- Q1.** (a) Les deux fonctions sont définies sur $\mathbf{R}$ qui est bien un intervalle symétrique par rapport à l'origine. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\operatorname{ch}(-t) = \operatorname{ch} t$ et $\operatorname{sh}(-t) = -\operatorname{sh} t$ donc ch est paire et sh impaire.
- (b) Les deux fonctions sont dérivables par composition. Le calcul est immédiat par la formule de dérivation des composées.
- (c) La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ par composition. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - 2\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t = 0$. On en déduit que f est constante sur l'intervalle $\mathbf{R}$. En $t = 0$, on a $\operatorname{ch} t = 1$ et $\operatorname{sh} t = 0$ donc $f(0) = 1$. On a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = 1$, autrement dit $(\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2 = 1$.
- Q2.** Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t > 0$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Par ailleurs, $\operatorname{ch}'(t) = \operatorname{sh} t$ qui est du signe de t (en effet, par stricte croissance de l'exponentielle, $e^t > e^{-t}$ ssi $t > -t$, ssi $t > 0$). La fonction ch est donc strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. Les limites en $\pm\infty$ sont évidentes, on en déduit les tableaux de variations :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch} t$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$\operatorname{sh} t$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Q3.** (a) La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$, on a $\operatorname{sh} 0 = 0$ et $\operatorname{sh} t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc il existe $x > 0$ tel que $\operatorname{sh} x > 1$. D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $\alpha \in]0; x[\subset \mathbf{R}$ tel que $\operatorname{sh} \alpha = 1$.
- (b) $z^2 - 2z - 1 = e^{2\alpha} - 2e^\alpha - 1 = e^\alpha(e^\alpha - 2 - e^{-\alpha}) = e^\alpha(2\operatorname{sh} \alpha - 2) = 0$ car $\operatorname{sh} \alpha = 1$ par définition.
- (c) On résout $z^2 - 2z - 1 = 0$: on a $\Delta = 8 > 0$ donc $z = 1 \pm \sqrt{2}$. On cherche maintenant α tel que $e^\alpha = 1 \pm \sqrt{2}$. L'équation n'admet pas de solution dans le cas $1 - \sqrt{2}$ car c'est un nombre négatif; dans le cas $1 + \sqrt{2}$ l'unique solution est $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$. On vérifie :

$$\operatorname{sh}(\ln(1 + \sqrt{2})) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right) = \frac{3 + 2\sqrt{2} - 1}{2(1 + \sqrt{2})} = 1.$$

- (d) On a montré à la question (a) que $\alpha \geq 0$ (c'est également évident à l'aide de la formule $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$ car $1 + \sqrt{2} \geq 1$). Pour la majoration, on peut par exemple remarquer que $e > \frac{5}{2}$ et $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ donc $\operatorname{sh} 1 = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} > 1$. Par stricte croissance de la fonction sh , on a $\operatorname{sh} \alpha \leq \operatorname{sh} 1$ donc $\alpha \leq 1$.
- Q4.** $\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right) = \frac{3 + 2\sqrt{2} + 1}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Suite d'intégrales.

- Q5.** $I_0 = \int_0^\alpha 1 \, dt = 1 \cdot (\alpha - 0) = \alpha$ (intégrale d'une constante).
- Q6.** Pour tout $t \in [0; \alpha]$, on a $0 \leq \operatorname{sh} t \leq 1$ (par croissance de la fonction sh). On en déduit que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq (\operatorname{sh} t)^{2n+2} \leq (\operatorname{sh} t)^{2n}$. Par croissance de l'intégrale (car $0 \leq \alpha$), on en déduit $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Autrement dit, la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

- Q7.** (a) La fonction sh (et donc toutes ses puissances) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^\alpha \underbrace{(\text{sh } t)^{2n+1}}_{=1+(\text{sh } t)^2} \widehat{\text{sh } t} \, dt = \left[(\text{sh } t)^{2n+1} \text{ch } t \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2n+1) \text{ch } t (\text{sh } t)^{2n} \text{ch } t \, dt \\ &= \text{ch } \alpha - (2n+1) \int_0^\alpha \underbrace{(\text{ch } t)^2}_{=1+(\text{sh } t)^2} (\text{sh } t)^{2n} \, dt = \text{ch } \alpha - (2n+1)(I_n + I_{n+1}). \end{aligned}$$

- (b) D'après la question précédente, $(1+2n+1)I_{n+1} = \text{ch } \alpha - (2n+1)I_n$ et donc, d'après **Q4**, $I_{n+1} = \frac{\sqrt{2} - (2n+1)I_n}{2n+2}$.
- (c) On a montré à **Q6** que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ . On en déduit que la suite extraite (I_{n+1}) converge vers le même ℓ . Par ailleurs, $\frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2} I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 - 1 \cdot \ell = -\ell$, autrement dit $(I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-\ell$. Par unicité de la limite, on a donc $\ell = -\ell$, d'où $\ell = 0$.

PROBLÈME II

- Q1.** X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$; autrement dit, $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in X(\Omega)$. De plus, $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

- Q2.** (a) Il y a deux types de résultats possibles : dans les situations où seul le premier dé est lancé, il peut renvoyer tous les entiers de 1 à $m-1$; au contraire, en cas d'« explosion », son résultat (m) s'additionne à celui du deuxième dé (qui peut renvoyer tous les entiers de 1 à n), pour un résultat total entre $m+1$ et $m+n$. Ainsi $Y(\Omega) = \llbracket 1; m-1 \rrbracket \cup \llbracket m+1; m+n \rrbracket$ (alternativement, on pourrait dire que $Y(\Omega) = \llbracket 1; m+n \rrbracket$ et démontrer ultérieurement que $\mathbf{P}(Y = m) = 0$).

- (b) C'est le simple lancer d'un dé équilibré à m faces : $\mathbf{P}(Y = y) = \frac{1}{m}$.

- (c) Si on suppose que $X_1 = m$ (autrement dit, qu'une « explosion » a lieu), alors le deuxième dé est lancé et ses résultats suivent la loi uniforme décrite à la question **Q1**. Autrement dit, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbf{P}(X_2 = k \mid X_1 = m) = \frac{1}{n}$; ce qui peut se reformuler (comme $Y = X_1 + X_2 = m + X_2$ dans le cas où on se place) : $\mathbf{P}(Y = y \mid X_1 = m) = \frac{1}{n}$ pour tout $y \in \llbracket m+1; m+n \rrbracket$.

Pour en déduire $\mathbf{P}(Y = y)$, on utilise la formule des probabilités totales (les événements $(X_1 = m)$ et $(X_1 \neq m)$ formant un système complet) :

$$\mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{P}(Y = y \mid X_1 = m)\mathbf{P}(X_1 = m) + \mathbf{P}(Y = y \mid X_1 \neq m)\mathbf{P}(X_1 \neq m).$$

Évidemment, $\mathbf{P}(Y = y \mid X_1 \neq m) = 0$ car les valeurs strictement supérieures à m ne peuvent pas être atteintes sans « explosion » ; ainsi $\mathbf{P}(Y = y) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{mn}$.

- (d) On peut vérifier que $\mathbf{P}(Y = m) = 0$, soit en additionnant les probabilités trouvées précédemment pour toutes les autres valeurs et en constatant que leur somme vaut déjà 1, soit en raisonnant comme à la question (a) pour justifier que cette valeur ne peut pas être atteinte (s'il n'y a pas « explosion », le résultat est au maximum $m-1$; s'il y a « explosion », le résultat est au minimum $m+1$).

- Q3.** Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2)$; on sait (d'après **Q1**) que $\mathbf{E}(X_1) = \frac{m+1}{2}$. Pour $\mathbf{E}(X_2)$, on peut procéder par calcul direct :

$$\mathbf{E}(X_2) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(X_2 = k) = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2mn} = \frac{n+1}{2m}$$

Par somme, on retrouve le résultat souhaité.

Q4. Pour tout $n \geq m$,

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{2} \left(m - (n+1) + \frac{n+1}{m} + \frac{1}{m} - m + n - \frac{n}{m} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1-m}{2m} < 0,$$

la suite $(D_n)_{n \geq m}$ est donc arithmétique de raison $\frac{1-m}{2m}$ et strictement décroissante.

Q5. C'est une simple résolution d'inéquation :

$$\begin{aligned} D_n \geq 0 &\iff m - n + \frac{n}{m} + \frac{1}{m} \geq 0 \\ &\iff \frac{1-m}{m} n \geq -\frac{m^2+1}{m} \\ &\iff n \leq \frac{m^2+1}{m-1} \quad (\text{car } 1-m < 0) \end{aligned}$$

Q6. Si $m \geq 2$, alors $\frac{m^2+1}{m-1} = \frac{m^2-m+m+1}{m-1} = m + \frac{m+1}{m-1} > m+1$ car $m+1 > m-1$. Ainsi, pour $n = m+1$, on a $n \leq \frac{m^2+1}{m-1}$ donc $D_n \geq 0$, soit $\mathbf{E}(Y) \geq \mathbf{E}(X)$; il est donc plus favorable, dans ce cas, de lancer le dé à m faces et d'espérer une « explosion ».

Q7. De la même manière que précédemment, $\frac{m^2+1}{m-1} = m + \frac{m+1}{m-1}$; mais si $m > 3$, alors $m+1 < 2(m-1)$. donc $\frac{m+1}{m-1} < 2$. Ainsi, pour $n \geq m+2$, on a en particulier $n \geq \frac{m^2+1}{m-1}$ donc $D_n \leq 0$, soit $\mathbf{E}(Y) \leq \mathbf{E}(X)$; il est donc plus favorable, dans ce cas, de lancer directement le dé à n faces.

Q8. Si $m = 2$ ou 3 , alors $\frac{m^2+1}{m-1} = 5$. On en déduit donc que, dans ces deux cas, l'« explosion » est plus favorable tant que $n \leq 5$ (les deux stratégies sont équivalentes si n est précisément égal à 5).

PROBLÈME III

Partie A – Lieux de points.

Q1. Par simple calcul, $f(a) = 0$, $f(b) = 2$ et $f(c) = \frac{-2+i2\sqrt{3}/3}{i2\sqrt{3}/3} = 1 + i\sqrt{3}$. On mesure maintenant les trois longueurs; $AB = 2$, $AC = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ et $BC = |1 + i\sqrt{3} - 2| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$. On en déduit que le triangle ABC est équilatéral de côté 2.

Q2. Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\}$. Alors $|f(z)| = 1 \iff |z-1| = |z+1|$, autrement dit si le point d'affixe z est équidistant des points d'affixes 1 et -1 ; ce point doit donc être situé sur la médiatrice du segment $[1; -1]$, c'est-à-dire l'axe imaginaire pur. Ainsi, $|f(z)| = 1 \iff z \in i\mathbf{R}$.

Q3. Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\}$. Alors $|f(z)| = 1 \iff |z-1| = 2|z+1|$, dont le lieu géométrique est moins évident qu'à la question précédente. On pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} |z-1| = 2|z+1| &\iff |x-1+iy| = 2|x+1+iy| \\ &\iff \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \\ &\iff (x-1)^2 + y^2 = 4(x+1)^2 + y^2 \\ &\iff 3x^2 + 10x + 3y^2 + 3 = 0 \\ &\iff x^2 + \frac{10}{3}x + y^2 + 1 = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 + 1 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation cartésienne du cercle de centre $(-\frac{5}{3}; 0)$ et de rayon $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$.

III.A. Partie B – Étude d’une suite récurrente.

- Q4.** (a) Pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\}$, $f(z) = 1 \iff z - 1 = z + 1 \iff 2 = 0$, ce qui est évidemment impossible. Cette équation n’a donc pas de solution. En revanche, si $\omega \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$,

$$f(z) = \omega \iff z - 1 = \omega(z + 1) \iff z(1 - \omega) = \omega + 1 \iff z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}.$$

- (b) La fonction f n’est pas surjective car le nombre 1, qui appartient à l’ensemble d’arrivée $\mathbf{C}$, n’a pas d’antécédent ; en revanche, elle est injective car tous les éléments de $\mathbf{C}$ possèdent *au plus* un antécédent (1 n’en a pas, les autres en ont exactement un).
- (c) On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 0$. La fonction f étant injective, on en déduit que si $z \notin \{0; 1\}$, alors $f(z) \notin \{-1; 0\}$. Par ailleurs, on a montré à la question (a) que $f(z) \neq 1$ quelle que soit la valeur de z ; d’où le résultat demandé.
- Q5.** (a) Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\}$. Alors $f(z) = z \iff z - 1 = z(z + 1) \iff z^2 + 1 = 0 \iff z = \pm i$.
- (b) D’après la question précédente, si $u_0 \in \{-i; i\}$, alors $u_1 = f(u_0) = u_0$; on en déduit par récurrence immédiate que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est constante dans ce cas.
- (c) On montre la contraposée : supposons qu’il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n \in \{-i; i\}$ et montrons qu’alors $u_0 \in \{-i; i\}$.

Le cas $n = 0$ est évident. Supposons donc qu’il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $u_n \in \{-i; i\}$, alors cela signifie que $f(u_{n-1}) \in \{-i; i\}$. Mais f étant injective, cela implique nécessairement que $u_{n-1} \in \{-i; i\}$; par récurrence immédiate, on a donc $u_0 \in \{-i; i\}$.

- Q6.** (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - i}{u_{n+1} + i} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} - i}{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} + i} = \frac{u_n - 1 - i(u_n + 1)}{u_n - 1 + i(u_n + 1)} \\ &= \frac{(1 - i)u_n - 1 - i}{(1 + i)u_n - 1 + i} = \frac{(1 - i)(u_n - i)}{(1 + i)(u_n + i)} = \frac{1 - i}{1 + i} v_n = -i v_n. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc géométrique de raison $-i$.

- (b) D’après la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+4} = (-i)^4 u_n = u_n$.
On peut aussi remarquer que, géométriquement, la multiplication par $-i$ s’interprète comme une rotation autour de l’origine et d’angle orienté $-\frac{\pi}{4}$ (en effet, le produit d’un nombre complexe par $-i = e^{-i\pi/4}$ est un nombre de même module et d’argument soustrait de $\frac{\pi}{4}$). Les points d’affixes u_0, u_1, u_2 et u_3 forment donc un carré centré autour de l’origine du repère (et, par périodicité, les autres termes de la suite ne font que repasser par ces points).
- (c) On écrit les termes de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en fonction de ceux de $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Remarquons qu’il est impossible d’avoir $v_n = 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n - i}{u_n + i} \iff u_n - i = v_n(u_n + i) \\ \iff u_n(1 - v_n) &= i(v_n + 1) \iff u_n = -i \frac{v_n + 1}{v_n - 1}. \end{aligned}$$

Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $v_{n+4} = v_n$, on en déduit que $u_{n+4} = u_n$.