

Samedi 5 octobre 2024 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

PROBLÈME I

On s'intéresse à l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que, si f est un endomorphisme, on note $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc. (et, par convention, $f^0 = \text{id}$).

I.A. Généralités.

Q1. Calculer A^2 et A^3 . En déduire que $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$.

Q2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Q3. Déterminer l'image et le noyau de f .

I.B. Recherche d'une base adaptée.

Q4. On s'intéresse à l'ensemble $F_1 = \{u \in \mathbf{R}^3 \mid f(u) = u\}$. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Q5. Montrer que F_1 est de dimension 1 et en donner une base (e_1).

Q6. On pose $e_2 = (0, 0, 1)$. Exprimer $f(e_2)$ en fonction de e_1 et e_2 .

Q7. Montrer que $F_2 = \{u \in \mathbf{R}^3 \mid f(u) = 2u\}$ est de dimension 1 et en donner une base (e_3).

Q8. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Q9. Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.

I.C. Calcul des puissances de A .

Q10. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer $f^k(e_2)$.

Q11. En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la matrice T^k .

Q12. Donner une relation entre T et A . En déduire que

$$A^k = PT^kP^{-1}, \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On ne demande pas de justifier que P est inversible.

Q13. Calculer P^{-1} .

Q14. En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la matrice A^k .

PROBLÈME II

On rappelle que, pour tous x réel strictement positif et α réel, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$. On considère la fonction $g: x \mapsto x^x$ définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

II.A. Étude de la fonction g .

- Q1.** Calculer $g(1)$ et justifier que g est dérivable sur I .
- Q2.** Dresser le tableau de variations de g et préciser ses limites aux bornes de I .
- Q3.** Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g .
- Q4.** On admet que, pour $x \rightarrow 1$, $g(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2)$. Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g .
- Q5.** Représenter sur l'intervalle $]0; 2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue dans la question précédente sur le même graphique.
On donne $e^{-1} \simeq 0,37$ et $g(e^{-1}) \simeq 0,69$.
- Q6.** À l'aide du graphique, justifier l'encadrement $e^{-1} < \int_0^1 x^x dx < 1$.

II.B. Une approximation plus précise de $\int_0^1 x^x dx$.*II.1. Un calcul d'intégrales.*

- Q7.** Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\int_0^1 x^n dx$.
- Q8.** Soient $(n, k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$. Justifier que la fonction $x \mapsto x^n \ln(x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.

Dans la suite, on notera de la même manière la fonction prolongée.

- Q9.** Soient $(n, k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^k dx = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln(x))^{k-1} dx.$$

- Q10.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. À l'aide d'une récurrence sur k , en déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\int_0^1 x^k (\ln(x))^k dx = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$$

Justifier que cette égalité est toujours vraie si $n = k = 0$.

II.2. Expression de $\int_0^1 x^x dx$ à l'aide d'une série.

- Q11.** Soit $z \in \mathbf{R}$. Montrer que la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est convergente.

On admet que, pour tout $z \in \mathbf{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

- Q12.** Justifier que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x \ln(x))^n}{n!} dx$ (on admettra que, dans le cas présent, la propriété de linéarité de l'intégrale reste valable pour une somme infinie).

Q13. En déduire l'égalité $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Q14. Soit $p \in \mathbf{N}$. On note $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ le reste au rang p de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$. On admet que $|R_p| \leq \frac{1}{(p+2)^{p+2}}$.

(a) Donner une valeur approchée de $\int_0^1 x^x dx$ à $\frac{1}{27}$ près.

(b) Écrire en Python une fonction `approximation(h)` qui prend en paramètre un réel strictement positif h et renvoie un nombre réel représentant une approximation de $\int_0^1 x^x dx$ à h près.

(d'après CCINP 2021)

PROBLÈME III

III.A. Polynômes de Bernoulli.

Q1. Montrer soigneusement que l'application $\psi: P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Q2. Soit $H = \left\{ P \in \mathbf{R}[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

Q3. Montrer que $\mathbf{R}[X] = H \oplus \mathbf{R}_0[X]$. On pourra utiliser le fait que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$,

$$P = \left(P - \int_0^1 P(t) dt \right) + \int_0^1 P(t) dt.$$

Pour tout $P \in H$, on pose $D(P) = P'$. Ceci définit une application linéaire $D: H \rightarrow \mathbf{R}[X]$.

Q4. Montrer que D est surjective.

Q5. Montrer que D est un isomorphisme.

On note $\varphi = D^{-1}$ l'isomorphisme réciproque de D . Ainsi, si $A \in \mathbf{R}[X]$, le polynôme $B = \varphi(A)$ est l'unique polynôme de H tel que $B' = A$.

Q6. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On note Q la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad Q(x) = \int_0^x P(t) dt + \int_0^1 (t-1)P(t) dt.$$

(a) Montrer que $Q \in H$.

(b) Vérifier que $Q = \varphi(P)$.

On s'intéresse maintenant à la suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et la relation de récurrence $B_{n+1} = \varphi(B_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le polynôme nB_n est appelé *n-ème polynôme de Bernoulli*.

Q7. Calculer B_1 et B_2 .

Q8. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on définit le polynôme C_n par

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$$

Q9. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, exprimer C'_{n+1} en fonction de C_n .

Q10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.

Q11. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $B_n(1 - x) = (-1)^n B_n(x)$.

Q12. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$.

III.B. Formule d'Euler-Maclaurin. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[0; 1]$. Pour tout entier $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de la fonction f .

Enfin, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note $b_k = B_k(0)$. Le nombre kb_k est appelé k -ème *nombre de Bernoulli*.

On pose

$$J_n = \int_0^1 B_{2n}(t) f^{(2n)}(t) dt.$$

Q13. Si $n \geq 2$, montrer que $J_n = b_{2n} \left(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0) \right) + J_{n-1}$.

Q14. Montrer que

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - b_2 \left(f'(1) - f'(0) \right) + J_1.$$

Q15. En déduire que

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{f(1) + f(0)}{2} - \sum_{k=1}^n b_{2k} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0) \right) + J_n.$$

Q16. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$. En considérant la fonction $x \mapsto g((1-x)a + bx)$ définie sur $[0; 1]$, montrer la *formule d'Euler-Maclaurin* :

$$\int_a^b g(t) dt = \frac{b-a}{2} \left(g(b) - g(a) \right) - \sum_{k=1}^n (b-a)^{2k} b_{2k} \left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a) \right) + R_n,$$

$$\text{où } R_n = \int_0^1 (b-a)^{(n+1)} B_{2n}(t) g^{(2n)}((1-t)a + bt) dt.$$

(d'après Centrale-Supélec 2014)

★ ★
★