

Samedi 18 janvier 2025 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

PROBLÈME I. ÉTUDE D'UNE COURBE

On considère deux fonctions f et g de la variable réelle t définies par

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée $\{M(t) \mid t \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}\}$.

Deux fonctions.

- Q1.** Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g .
- Q2.** Calculer $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$.
- Q3.** Justifier que f est une fonction paire et g une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour le point $M(-t)$ par rapport au point $M(t)$?
- Q4.** Déterminer des fonctions équivalentes aux fonctions f et g en $+\infty$. En déduire les limites de f et g en $+\infty$.
- Q5.** Déterminer les limites de f et g en 1 à gauche, puis à droite (il y a donc quatre limites à calculer en tout).
- Q6.** Justifier que les fonctions f et g sont dérivables sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$, de dérivées respectives

$$f'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \quad \text{et} \quad g'(t) = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}.$$

- Q7.** Déduire des questions précédentes les tableaux de variations des fonctions f et g sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$, dans lesquels figureront les limites, ainsi que les valeurs de f et g en $\sqrt{3}$.

Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$.

- Q8.** Rappeler (sans justification) le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$.
- Q9.** Déterminer les développements limités des fonctions f et g en 0 à l'ordre 3.
- Q10.** Sans calculer les dérivées secondes f'' et g'' des fonctions f et g , montrer que $f''(0) = 2$ et $g''(0) = 0$. Le théorème utilisé sera mentionné.
- Q11.** En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en l'origine du repère.
- Q12.** Déterminer les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(\sqrt{3})$.

Asymptotes. On note $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $y = x - \frac{1}{2}$. Pour t appartenant à l'ensemble de définition de f , on note $N(t)$ le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse $f(t)$.

Q13. Sachant que les limites respectives de f et g en $+\infty$ sont -1 et $-\infty$, donner une interprétation graphique de la courbe $\mathcal{C}$ vis-à-vis de la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$. Dessiner sur la copie l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$.

Q14. Déterminer l'ordonnée $y_{N(t)}$ de $N(t)$ en fonction de $f(t)$.

On se propose dans la suite de cette partie d'examiner la quantité $g(t) - y_{N(t)}$ qui représente la distance algébrique entre les points $M(t)$ et $N(t)$.

Q15. Factoriser le trinôme $P(t) = -2t^2 + t + 1$.

Q16. On considère sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$ la fonction $\delta: t \mapsto g(t) - f(t) + \frac{1}{2}$. Montrer que, pour tout $t \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $\delta(t) = \frac{P(t)}{2(t+1)}$.

Q17. Quel est le signe de $\delta(t)$ lorsque t est au voisinage de 1 ?

Q18. Déterminer la limite de la quantité $g(t) - y_{N(t)}$ lorsque t tend vers 1. Dessiner sur la copie l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t = 1$.

Tracé de la courbe.

Q19. En tenant compte des informations issues des questions précédentes, tracer la courbe suivante :

$$\mathcal{C}_1 = \{M(t) \mid t \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\}.$$

On utilisera l'échelle suivante : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 2 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées. On considérera par ailleurs que $\sqrt{3} \simeq 1,73$.

On fera apparaître :

- la droite $\mathcal{D}$;
- les vecteurs tangents à l'origine du repère et au point $M(\sqrt{3})$;
- la droite d'équation $x = -1$.

Q20. En utilisant une couleur différente ou en pointillés, compléter le tracé précédent en traçant la courbe suivante :

$$\mathcal{C}_2 = \{M(t) \mid t \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\}.$$

(d'après CCINP 2017)



PROBLÈME II. AUTOUR DE LA FONCTION DILOGARITHME

Dans tout le problème, on considère la fonction f définie sur $] -\infty; 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & t \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

On admet que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; 1[$.

Dans ce problème, on s'intéresse à la fonction Dilogarithme définie pour tout $x \in [-1; 1[$ par :

$$L(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Développement en série entière de L .

- Q1.** (a) Vérifier que la fonction L est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1; 1[$.
 (b) Déterminer, pour tout $x \in [-1; 1[$, $L'(x)$.
Q2. (a) Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$.
 (b) En déduire le développement en série entière de la fonction f sur $] -1; 1[$.
Q3. (a) Montrer, en citant soigneusement le théorème utilisé, que, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

On donne le *théorème radial d'Abel* :

Soit une série entière de coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de rayon $R > 0$ et de somme S . On suppose que la série converge en un point x_0 tel que $|x_0| = R$. Alors :

- si $x_0 = -R$, alors $\lim_{x \rightarrow (-R)^+} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$;
- si $x_0 = +R$, alors $\lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

- (b) Vérifier que le développement de la question précédente est encore valable en $x = -1$.
 (c) Montrer que L admet un prolongement par continuité en 1 ; on note désormais ce prolongement $L(1)$.
 (d) En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ converge et que :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = L(1).$$

On admet dans la suite que $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

- Q4.** On considère l'intégrale impropre $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$.

- (a) Montrer que J converge.
 (b) Exprimer la valeur de J à l'aide du nombre π (on pourra utiliser le changement de variable $t = 1 - e^{-x}$).

- Q5.** (a) Montrer que, pour tout $x \in [-1; 1]$, $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$ (on peut par exemple dériver les deux membres de l'égalité).
 (b) En déduire une expression à l'aide du nombre π de la valeur de $L(-1)$.

Étude d'une équation différentielle. On se propose de résoudre dans $[-1; 1[$ l'équation différentielle :

$$xy'' + y' = \frac{1}{1-x}, \quad (1)$$

où y est une fonction réelle de la variable x .

On considère sur $[-1; 0[\cup]0; 1]$ l'équation différentielle :

$$xz' + z = \frac{1}{1-x}, \quad (2)$$

où z est une fonction réelle de la variable x .

Dans la suite, K désigne indifféremment l'un des deux intervalles $[-1; 0[$ ou $]0; 1[$

- Q6.** (a) Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (2) sur K .
 (b) Démontrer que les solutions de (2) sur l'intervalle K sont les fonctions z de la forme : $x \mapsto z(x) = f(x) + \frac{A}{x}$ où A est une constante réelle.
- Q7.** En déduire que les solutions de (1) sur l'intervalle K sont les fonctions y de la forme : $x \mapsto y(x) = L(x) + A \ln |x| + B$, où A et B sont des constantes réelles.
- Q8.** Soit y une solution éventuelle de l'équation (1) sur l'intervalle $[-1; 1[$.
 (a) À l'aide des questions précédentes, déterminer l'expression explicite de y sur $[-1; 0[$ et sur $]0; 1]$.
 (b) Écrire deux équations exprimant le fait que y doit être, respectivement, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.
 (c) En déduire l'ensemble des solutions de (1) sur $[-1; 1[$.

(d'après CCINP 2014)

★ ★
★