Problème I. Étude d'une courbe

Deux fonctions.

Q1. Les fonctions f et g sont bien définies tant que leur dénominateur ne s'annule pas, autrement dit sur $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Q2. $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{1-3} = -\frac{3}{2}$ et $g(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Q3. On remarque que les domaines de définition de f et g sont symétriques par rapport à l'origine. De plus, pour tout $t \neq \pm 1$,

$$\begin{cases} f(-t) = \frac{(-t)^2}{1-(-t)^2} = \frac{t^2}{1-t^2} = f(t) \\ g(-t) = \frac{(-t)^3}{1-(-t)^2} = \frac{-t^3}{1-t^2} = -g(t). \end{cases}$$

On en déduit que la fonction f est paire et la fonction g impaire. Le point $M(-t)$ est donc de même abscisse, mais d'ordonnée opposée, au point $M(t)$; il s'agit donc de son symétrique par rapport à l'axe (Ox).

Q4. Pour t tendant vers $+\infty$, $f(t) \sim \frac{t^2}{-t^2} = -1$ et $g(t) \sim \frac{t^3}{-t^2} = -t$. On en déduit que f tend vers -1 et g vers $-\infty$

Q5. Pour t tendant vers 1, le dénominateur $1 - t^2$ tend vers 0^+ si $t < 1$ et 0^- si $t > 1$, tandis que les deux numérateurs t^2 et t^3 tendent vers 1 ; on en déduit les quatre limites :

$$\lim_{t \to 1^-} f(t) = +\infty; \quad \lim_{t \to 1^+} f(t) = -\infty; \quad \lim_{t \to 1^-} g(t) = +\infty; \quad \lim_{t \to 1^+} g(t) = -\infty.$$

Q6. Par composition, les fonctions f et g sont dérivables sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. Pour tout $t \neq 1$, on a

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{2t(1-t^2)-t^2(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \\ g'(t) = \frac{3t^2(1-t^2)-t^3(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{3t^2-t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2} \end{cases}$$

Q7. Pour dresser les tableaux de variations, il s'agit d'étudier le signe des dérivées f' et g'. On voit que f' est positive sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$ et s'annule en $t = 0$; de son côté, g' est positive sur $[0; 1[\cup \left]1; \sqrt{3}\right]$, puis négative sur $\left[\sqrt{3}; +\infty\right[$, avec annulation en 0 et en $\sqrt{3}$. On en déduit le tableau :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$g'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(t)$		$0 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	$-3/2$	$\nearrow -1$	
$g(t)$		$0 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\searrow -\infty$	

Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$.

Q8. $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$.

Q9. Si $t \to 0$, alors $t^2 \to 0$ donc on peut écrire, d'après la formule précédente, $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + o(t^2)$. En multipliant par les numérateurs respectifs, on obtient

$$\begin{cases} f(t) = t^2(1 + t^2 + o(t^2)) = t^2 + o(t^3) \\ g(t) = t^3(1 + t^2 + o(t^2)) = t^3 + o(t^3) \end{cases}$$

Q10. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 (car les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, par composition) on peut écrire

$$\begin{cases} f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \frac{t^3}{6}f'''(0) + o(t^3) \\ g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + \frac{t^3}{6}g'''(0) + o(t^3) \end{cases}$$

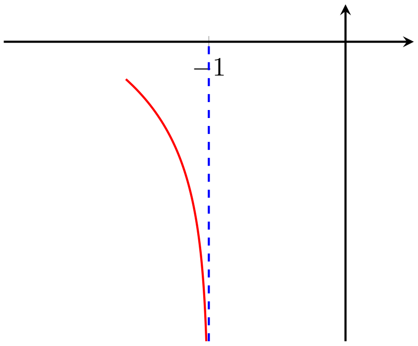
Par unicité du développement limité, on peut identifier ces formules avec celles de la question précédente. En particulier, en identifiant les termes de degré 2 : $\frac{t^2}{2}f''(0) = t^2$ donc $f''(0) = 2$ et $\frac{t^2}{2}g''(0) = 0$ donc $g''(0) = 0$.

Q11. On a $M(0) = (0,0)$ donc un vecteur tangent à la courbe en l'origine du repère est donné par le premier vecteur dérivé non nul de (f,g) en $t = 0$. D'après les questions précédentes, il s'agit du vecteur dérivé d'ordre 2 et il vaut $\binom{2}{0}$. Un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en l'origine est donc $\binom{1}{0}$.

Q12. On a $g'(\sqrt{3}) = 0$ mais $f'(\sqrt{3}) \neq 0$, donc la courbe admet en $M(\sqrt{3})$ une tangente horizontale. Un vecteur tangent est donc $\binom{1}{0}$.

Asymptotes.

Q13. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$.



On note que $f(t) < 1$ et $g(t) \to -\infty$ donc la courbe reste à gauche de l'asymptote et se dirige vers le bas.

Q14. Par définition, $N(t)$ est le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse $f(t)$. Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ étant $y = x - \frac{1}{2}$, on a donc $y_{N(t)} = f(t) - \frac{1}{2}$.

Q15. On remarque que $t = 1$ est racine : on peut donc écrire $P(t) = -2t^2 + t + 1 = -2(t-1)(t+\frac{1}{2})$.

Q16. Pour tout $t \neq 1$,

$$\delta(t) = \frac{t^3 - t^2}{1 - t^2} + \frac{1}{2} = \frac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t)} + \frac{1}{2} = \frac{-t^2}{1+t} + \frac{1}{2}.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient

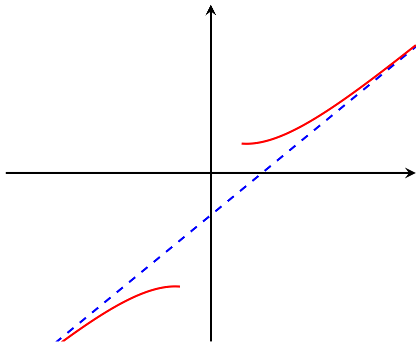
$$\delta(t) = \frac{-2t^2 + (1+t)}{2(1+t)} = \frac{P(t)}{2(1+t)}.$$

Q17. Pour tout t au voisinage de 1, le dénominateur $1 + t$ est positif. Pour ce qui est du signe du numérateur $P(t)$, on utilise la factorisation de la question (14) :

t		1	
-2	$-$		$-$
$t + \frac{1}{2}$	$+$		$+$
$(t-1)$	$-$	0	$+$
$P(t)$	$+$	0	$-$

On en déduit qu'au voisinage de 1, $\delta(t)$ est positif si $t < 1$ et négatif si $t > 1$.

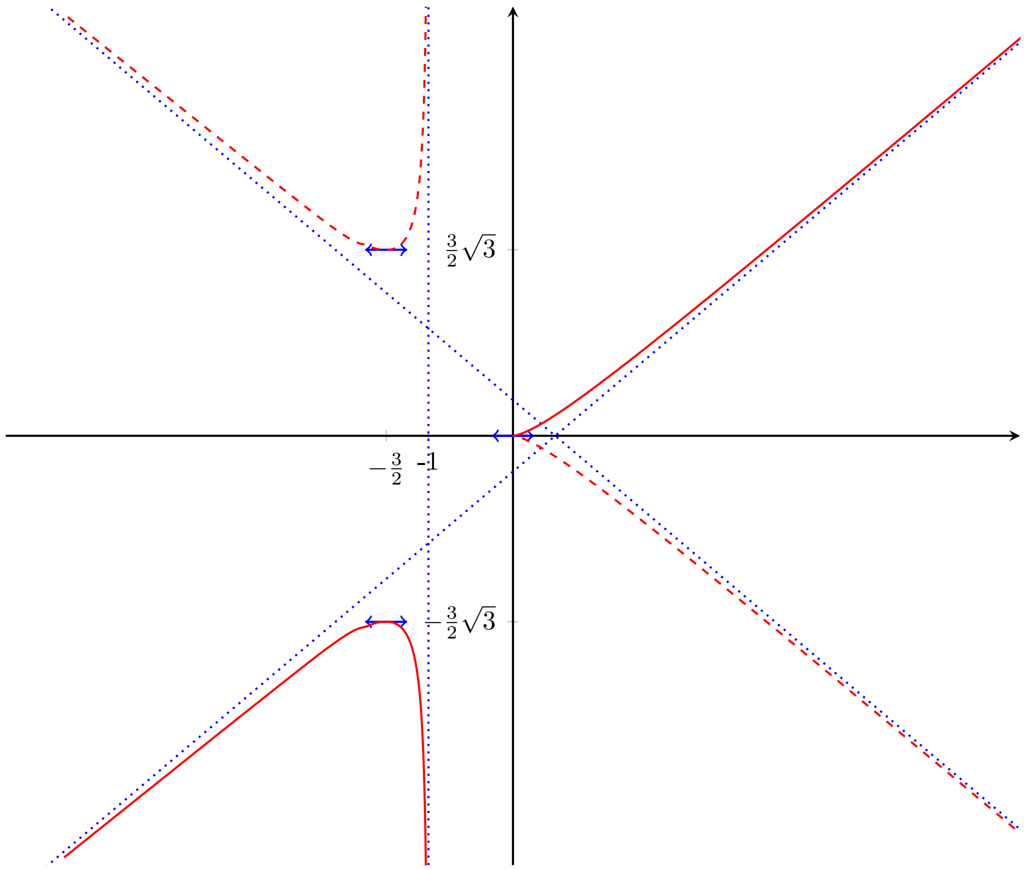
Q18. D'après la question (14), $g(t) - y_{N(t)} = \delta(t) = \frac{P(t)}{2(1+t)}$. Lorsque $t \to 1$, $1+t \to 2$ et $P(t) \to 0$ donc $\delta(t) \to 0$. On en déduit que la droite $\mathcal{D}$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t = 1$.



Pour $t \to 1^-$, $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers $+\infty$ donc la courbe se dirige vers le haut à droite ; on a $\delta(t) > 0$ donc la courbe est au-dessus de son asymptote. Pour $t \to 1^+$, $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers $-\infty$ donc la courbe se dirige vers le bas à gauche ; on a $\delta(t) < 0$ donc la courbe est en-dessous de son asymptote.

Tracé de la courbe.

Q19. et **Q20.**



Problème II. Autour de la fonction dilogarithme

Développement en série entière de L.

Q1. (a) Si $x \in [-1;1[$, alors $[0;x] \subset]-\infty;1[$ donc f est continue sur $[0;x]$; on en déduit que $L(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie. De plus, d'après le théorème fondamental du calcul intégro-différentiel, L est une primitive de f ; la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que L est de classe $\mathcal{C}^2$.

(b) Pour tout $x \in [-1;1[$, $L'(x) = f(x)$.

Q2. (a) $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$, de rayon 1.

(b) D'après la question précédente, si $x \neq 0$, alors $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k}$. On remarque que la somme de cette série entière vaut $1 = f(0)$ en 0, l'expression est donc valable poiur tout $x \in]-1;1[$.

Q3. (a) Par théorème d'intégration terme à terme,

$$L(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\frac{x^k}{k}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2},$$

cette série entière étant de même rayon de convergence que $\sum \frac{x^{k-1}}{k}$ (c'est-à-dire 1).

(b) Il s'agit d'appliquer le théorème radial en $x_0 = -1$. On a bien $|x_0| = 1 = R$; de plus, la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k^2}$ est absolument convergente donc convergente. D'après le théorème radial, on en déduit que :

$$\lim_{x \to (-1)^+} L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Enfin, la fonction L étant continue en -1, cette limite est en réalité égale à $L(-1)$, d'où le résultat.

(c) De même qu'à la question précédente, comme $|1| = 1 = R$ et que la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente, d'après le théorème radial, $L(x)$ admet une limite finie en 1, égale à $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Autrement dit, elle est prolongeable par continuité en 1.

(d) La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]0;1[$. Elle admet un prolongement par continuité en 0, elle converge donc au niveau de son impropreté en 0. Pour ce qui est de l'impropreté en 1, posons $x \in]0;[$. Alors

$$\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -L(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} L(1) \in \mathbf{R};$$

on en déduit que l'intégrale converge également au niveau de son impropreté en 1.

Q4. On considère l'intégrale impropre $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

(a) La fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$.

Pour $x \to 0$, $e^x = 1 + x + o(x)$ donc $e^x - 1 \sim x$ donc $\frac{x}{e^x-1} \to 1$; l'intégrande admet donc un prolongement par continuité en 0 et l'intégrale est donc convergente en 0.

Pour $x \to +\infty$, on a $x^2 \times \frac{x}{e^x-1} = \frac{x^3}{e^x-1} \sim \frac{x^3}{e^x} \longrightarrow 0$ par croissance comparée ; ainsi $\frac{x}{e^x-1} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$; or l'intégrale de $\frac{1}{x^2}$ converge en $+\infty$ (car $2 > 1$), on en déduit que l'intégrale étudiée converge en $+\infty$ par théorème de comparaison.

(b) On va faire le changement de variables $t = 1 - e^{-x}$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant. On a $\mathrm{d}t = e^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $x = -\ln(1-t)$. De plus, $t(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} t = 1$. Alors :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 - e^{-x}} \frac{\mathrm{d}x}{e^x} = \int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît l'intégrale $L(1)$. Ainsi $J = \frac{\pi^2}{6}$.

Q5. (a) Étudions la différence : pour tout $x \in [-1;1]$, posons $\varphi(x) = L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$. La fonction φ est dérivable par composition et, pour tout $x \in]-1;1]$,

$$\varphi'(x) = L'(x) - L'(-x) - xL'(x^2) = f(x) - f(-x) - xf(x^2).$$

Si $x \neq 0$, alors

$$\varphi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{-x} + x\frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \frac{\ln(1-x^2) - \ln((1-x)(1+x))}{x} = 0;$$

on a de plus évidemment $\varphi'(0) = 1 - 1 - 0 = 0$. On en déduit que φ' est nulle sur tout l'intervalle $[-1;1]$, ainsi φ est constante sur cet intervalle. Enfin, $\varphi(0) = L(0) + L(0) - \frac{1}{2}L(0) = 0$; on en déduit que φ est constamment nulle, ce qui démontre l'égalité souhaitée.

(b) On applique l'égalité de la question précédente en $x = 1$: $L(1)+L(-1) = \frac{1}{2}L(1)$, donc $L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$.

Étude d'une équation différentielle.

Q6. (a) L'équation homogène est $xz' + z = 0$, soit $x' + \frac{z}{x} = 0$ (car $x \neq 0$ sur K). Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-\ln x} = \frac{A}{x}$ sur $]0;1[$ et $x \mapsto Ae^{-\ln(-x)} = \frac{A}{-x}$ sur $]-1;0[$, où A désigne n'importe quel nombre réel.

Remarquons que, quitte à remplacer A par $-A$ dans la seconde expression (ce qui ne change rien, A étant un réel quelconque), on peut utiliser l'expression $\frac{A}{x}$ dans les deux cas.

(b) On remarque que la fonction f est solution de (2). En effet, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = -\frac{\frac{-1}{1-x} \times x - \ln(1-x)}{x^2} = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

donc

$$xf'(x) + f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x) - \ln(1-x)}{x} = \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, f étant une solution particulière de (2) et les solutions homogènes étant données dans la question précédente, on en déduit par théorème de structure que les solutions de (2) sont les fonctions $z\colon x \mapsto f(x) + \frac{A}{x}$, $A \in \mathbf{R}$.

Q7. On remarque qu'une fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ est solution de (1) si et seulement si $z = y'$ est solution de (2). Ainsi, les solutions de (1) sont exactement les primitives des solutions de (2) et elles s'écrivent donc :

$$y = L(x) + A\ln(|x| + B, \quad (A, B \in \mathbf{R}).$$

Q8. (a) Si y est solution de (1) sur $[-1;1[$, alors elle est en particulier solution sur $[-1;0[$ et sur $]0;1[$. D'après les questions précédentes, il existe donc quatre constantes A_1, A_2, B_1 et B_2 telles que :

$$y(x) = \begin{cases} L(x) + A_1\ln(-x) + B_1 & \text{si } x < 0 \\ L(x) + A_2\ln x + B_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) La continuité de y en 0 signifie que les deux expressions de la question précédente doivent posséder des limites finies en 0 (on en déduit que les constantes A_1 et A_2 doivent être nulles) ; de plus ces deux limites doivent être égales (on en déuit que $B_1 = B_2$).

De même, la condition de classe $\mathcal{C}^1$ impose l'égalité des limites (finies) des dérivées de ces deux expressions ; on en déduit, de nouveau, $A_1 = A_2 = 0$ et $B_1 = B_2$.

(c) Ainsi, d'après les questions précédentes, si une fonction y est solution de (1) sur $[-1;1[$, alors il existe un réel B tel que, pour tout $x \in [-1;1[$, $y(x) = L(x) + B$. Réciproquement, on vérifie que toutes ces fonctions sont bien solutions de (1).