Mercredi 5 mars 2025 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

Exercice I

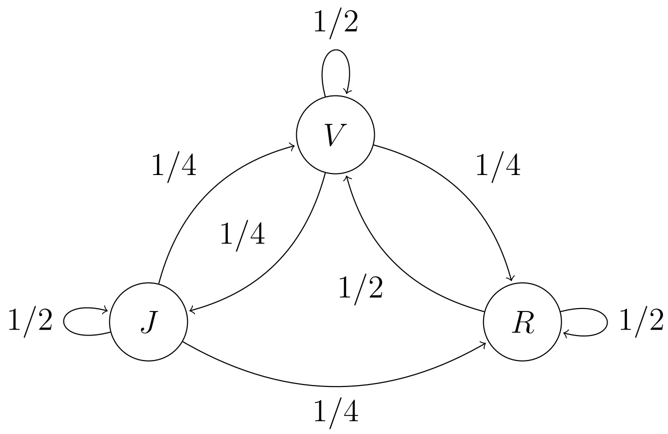
Sur la plage, les drapeaux hissés près des postes de secours avertissent des conditions de baignade liées à l'état de la mer et à la météo.

Les significations des couleurs de drapeaux sont les suivantes :
- drapeau vert : la baignade est surveillée et ne présente pas de danger apparent ;
- drapeau jaune : la baignade est surveillée avec danger limité ou marqué ;
- drapeau rouge : la baignade est interdite.

La couleur d'un drapeau est déterminée par de nombreux facteurs tels que la météo, l'état de la mer ou la présence de sauveteurs pour assurer la sécurité des baigneurs. Dans cet exercice, on considère que la couleur d'un drapeau est fixée quotidiennement et on modélise le changement de couleur selon les règles simplifiées suivantes :
- si le drapeau est vert un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et rouge sinon ;
- si le drapeau est jaune un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{4}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon.
- si le drapeau est rouge un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon ; un drapeau rouge ne peut donc pas passer à l'état jaune le jour suivant.

On note :
- V_n l'événement « le drapeau est vert le n-ème jour » et $v_n = \mathbf{P}(V_n)$;
- J_n l'événement « le drapeau est jaune le n-ème jour » et $j_n = \mathbf{P}(J_n)$;
- R_n l'événement « le drapeau est rouge le n-ème jour » et $r_n = \mathbf{P}(R_n)$.

La situation est résumée sur la **figure suivante** :



On suppose que le drapeau est vert le jour numéro 0.

Q1. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. À l'aide d'un système complet d'événements à préciser, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, j_n et r_n.

(b) Obtenir de même des expressions de j_{n+1} et de r_{n+1} en fonction de v_n, j_n et r_n.

(c) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $X_n = \left(\begin{smallmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{smallmatrix}\right)$. Préciser X_0. Justifier que $X_{n+1} = AX_n$, avec :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q2. (a) Déterminer les valeurs propres de A.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q3. Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$.

(a) On pose $e'_1 = (4, 2, 3)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (a, 0, b)$. Déterminer a et b pour :
- que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de $\mathbf{R}^3$;
- et que, dans cette base $\mathcal{B}'$, la matrice de f soit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(b) Préciser la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer Q^{-1}.

(c) Déterminer T^n pour tout $n \in \mathbf{N}$. On attend l'expression détaillée des coefficients de cette matrice. *On pourra utiliser le binôme de Newton sur une expression du type $D + N$, où D et N sont deux matrices bien choisies.*

(d) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, en déduire une expression de X_n en fonction de n, T, Q et de X_0.

Q4. À l'aide des résultats précédents, déterminer des expressions explicites pour v_n, j_n et r_n.

Q5. Au bout d'un grand nombre de jours, quelle est la couleur la plus probable pour le drapeau ?

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$, impaire et 2π-périodique telle que :

$$\forall\, x \in [0;\pi] \quad f(x) = x(\pi - x).$$

Q1. (a) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.

(b) Déterminer le réel α tel que :

$$\int_0^{\pi} t^2(\pi - t)^2 \,\mathrm{d}t = \alpha\pi^5.$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n^3}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Q2. Déduire de la question précédente la série de Fourier de la fonction f.

Q3. Étudier la convergence de cette série de Fourier.

Dans les trois questions suivantes, on utilise la série de Fourier précédente pour calculer les sommes de trois séries numériques. *Il n'est pas demandé d'établir la convergence de ces séries.*

Q4. On pose $R = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.

En utilisant la valeur de la série de Fourier de f en $x = \frac{\pi}{2}$, montrer que $R = \frac{\pi^3}{32}$.

Q5. (a) Énoncer le théorème de Parseval.

(b) Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

(c) En déduire la valeur de $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Indication : dans le calcul de T, on pourra considérer les termes d'indice pair et les termes d'indice impair.

Exercice II

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n.

Partie A. Questions préliminaires.

Q1. (a) Donner le tableau de variation de arccos sur $[-1;1]$ avec les valeurs remarquables.

Tracer, dans un même repère orthonormal, le graphe de cos sur $[0;\pi]$ et celui de arccos sur $[-1;1]$.

On n'oubliera pas de représenter les tangentes horizontales et verticales éventuelles.

(b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Rappeler, sans la justifier, l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\cos x$.

Pour les deux questions suivantes, il est attendu une démonstration faisant appel aux formules de trigonométries vues en cours, en particulier celles donnant le cosinus d'une somme ou d'une différence.

(c) Montrer que, pour tous a, b réels : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$.

(d) Établir que, pour tout x réel : $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Partie B. Un produit scalaire.

Q2. Soit $k \in \mathbf{N}$.

(a) Montrer que $\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$.

En déduire que $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$ converge.

(b) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbf{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t.$$

Par linéarité, la convergence de cette intégrale est une conséquence de la question précédente.

Q3. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Dans toute la suite du problème, $\mathbf{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire qu'on notera $\langle P \mid Q\rangle$. La norme associée sera notée $\|\cdot\|$.

Partie C. Une famille de fonctions. Pour tout entier naturel n, on appelle f_n la fonction définie sur $[-1;1]$ par :

$$f_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Q4. Soit $x \in [-1;1]$. À l'aide des résultats de **Q1**, exprimer $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sous forme d'un polynôme.

Q5. À l'aide de **Q1**, montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \ \ \forall x \in [-1;1] \quad f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2x f_n(x).$$

Q6. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et donner son coefficient dominant.

Q7. Prouver que, pour tout entier n, la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q8. Montrer que, pour tout $x \in [-1;1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $T_n(x) = f_n(x)$.

Partie D. Une base orthogonale.

Q9. Pour $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$.

(a) Démontrer que si $p \neq q$, alors $I_{p,q} = 0$.

(b) Calculer $I_{p,p}$.

Q10. À l'aide d'un changement de variable et de **Q9**, montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ définie dans la **partie C** est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

Q11. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, le polynôme T_n est orthogonal à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Q12. En utilisant un résultat du cours, donner une expression de X_n en fonction des polynômes de la base orthogonale $(T_0, \ldots, T_n)$.
À l'aide du calcul de $\langle T_n - 2^{n-1}X^n \mid T_n\rangle$, montrer enfin que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\langle X^n \mid T_n\rangle = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}.$$

Partie E. Minimiser une intégrale à paramètres. On souhaite déterminer :

$$I = \inf_{(a_0,a_1)\in\mathbf{R}^2} \int_{-1}^1 \frac{\left(t^2 - (a_0 + a_1 t)\right)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Q13. On désigne par p la projection orthogonale de $\mathbf{R}_2[X]$ sur $\mathbf{R}_1[X]$. En faisant intervenir une norme, exprimer I en fonction de p.

Q14. Déterminer une base *orthonormale* de $\mathbf{R}_1[X]$.

Q15. En déduire que $p(X^2) = \frac{1}{2}$.

Q16. Déterminer la valeur de I.

(tout le sujet d'après CCINP TPC 2024)