

EXERCICE I

Q1. (a) (V_n, J_n, R_n) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \mathbf{P}(V_{n+1}) = \mathbf{P}(V_{n+1} | V_n)\mathbf{P}(V_n) + \mathbf{P}(V_{n+1} | J_n)\mathbf{P}(J_n) + \mathbf{P}(V_{n+1} | R_n)\mathbf{P}(R_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}j_n + \frac{1}{4}r_n. \end{aligned}$$

(b) De même,

$$\begin{cases} j_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}j_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}j_n + \frac{1}{2}r_n \end{cases}$$

(c) Le drapeau étant vert le jour numéro 0, on a $v_0 = 1$ et $j_0 = r_0 = 0$, ainsi $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus, d'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$X_{n+1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2v_n + j_n + r_n \\ v_n + 2j_n \\ v_n + j_n + 2r_n \end{pmatrix} = AX_n.$$

Q2. (a) On calcule le polynôme caractéristique de A . Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \frac{1}{4^3} \begin{vmatrix} 4\lambda - 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4\lambda - 2 & 0 \\ -1 & -1 & 4\lambda - 2 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \frac{1}{4^3} \begin{vmatrix} 4\lambda - 1 & -1 & -2 \\ 1 - 4\lambda & 4\lambda - 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4\lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow -L_2 + L_1}{=} \frac{1}{4^3} \begin{vmatrix} 4\lambda - 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4\lambda - 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4\lambda - 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4^3} (4\lambda - 1) \begin{vmatrix} 4\lambda - 3 & -2 \\ -1 & 4\lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4^3} (4\lambda - 1) (16\lambda^2 - 20\lambda + 4) = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) \left(\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^2 (\lambda - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont $\frac{1}{4}$ (double) et 1 (simple).

(b) Il s'agit de résoudre les systèmes $AX = \lambda X$ pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ et $\lambda \in \{\frac{1}{4}; 1\}$.

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 4x \\ x + 2y = 4y \\ x + y + 2z = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -4y + y + 2z = 0 \\ x = 2y \\ 2y + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3y + 2z = 0 \\ x = 2y \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = \frac{3}{2}y \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $E_1 = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$, de dimension 1. D'autre part,

$$AX = \frac{1}{4}X \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = x \\ x + 2y = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $E_{1/4} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$, de dimension 1.

(c) La valeur propre $\frac{1}{4}$ est de multiplicité 2 tandis que son sous-espace propre associé est de dimension 1, la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Q3. Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$.

- (a) D'après la question précédente, e'_1 et e'_2 sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1 et $\frac{1}{4}$, ce qui correspond aux deux premières colonnes de la matrice T . Pour que la troisième colonne soit correcte, il s'agit de résoudre :

$$f(e'_3) = \frac{3}{4}e'_2 + \frac{1}{4}e'_3,$$

soit :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a+2b \\ a \\ a+2b \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix},$$

soit :

$$\begin{cases} 2a+2b = 3+a \\ a = -3 \\ a+2b = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \end{cases}$$

Enfin, la famille (e'_1, e'_2, e'_3) étant une famille de trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ (qui est de dimension 3), pour vérifier que c'est une base il suffit de calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{3^{\text{e}} \text{ ligne}}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 18 = -27 \neq 0.$$

- (b) $Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculons Q^{-1} :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{4}L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{21}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \\ &\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{2}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{2}{9}L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right) \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{4}L_2 + \frac{3}{4}L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } Q^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) On écrit $T = D + N$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $DN =$

$ND = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi on peut appliquer la formule du binôme de Newton. De plus, $N^2 = 0$ (et, par récurrence immédiate, $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$). Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 3n4^{-n} \\ 0 & 0 & 4^{-n} \end{pmatrix}.$$

On remarque que l'expression reste valable si $n = 0$ ($T^0 = I_3$).

- (d) D'après la formule de changement de base, on peut écrire $A = QTQ^{-1}$. Par ailleurs, par récurrence immédiate à partir de la question **Q1(c)**, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = (QTQ^{-1})^n X_0 = QT^n Q^{-1} X_0$.

Q4. On réalise le calcul proposé à la question précédente :

$$\begin{aligned}
 X_n &= (QTQ^{-1})^n X_0 = QT^n Q^{-1} X_0 \\
 &= \frac{1}{9 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{9 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{9 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n \\ 2 - 3n \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^{n+1} + 2 - 3n + 3 \\ 2 \cdot 4^n - 2 + 3n \\ 3 \cdot 4^n - 3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 + (5 - 3n)4^{-n} \\ 2 + (3n - 2)4^{-n} \\ 3 - 3 \cdot 4^{-n} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

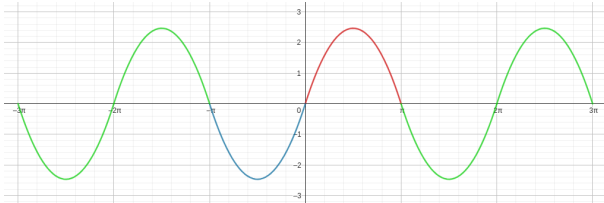
$$\begin{cases} v_n = \frac{1}{9}(4 + (5 - 3n)4^{-n}) \\ j_n = \frac{1}{9}(2 + (3n - 2)4^{-n}) \\ r_n = \frac{1}{9}(3 - 3 \cdot 4^{-n}) \end{cases}$$

(on peut remarquer à titre de vérification qu'on a toujours $v_n + j_n + r_n = 1$)

Q5. Lorsque n tend vers l'infini, les suites $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(j_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ont pour limites respectives $v = \frac{4}{9}$, $j = \frac{2}{9}$ et $r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. On en déduit que le plus probable au bout d'un grand nombre de jours est d'avoir un drapeau vert, avec une probabilité de $\frac{4}{9}$ environ.

EXERCICE II

Q1. (a) La partie rouge correspond à la définition donnée sur $[0; \pi]$ ($x(\pi - x)$ est un polynôme du second degré avec un coefficient dominant négatif et dont les racines sont en 0 et en π), la partie verte est obtenue par (im)parité et la partie verte par périodicité.



(b) La fonction $t \mapsto t^2(\pi - t)^2$ est continue sur $[0; \pi]$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi t^2(\pi - t)^2 dt &= \int_0^\pi (\pi^2 t^2 - 2\pi t^3 + t^4) dt = \left[\frac{\pi^2}{3} t^3 - \frac{2\pi}{4} t^4 + \frac{1}{5} t^5 \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5} = \frac{\pi^5}{30}.
 \end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction $t \mapsto t(\pi - t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $t \mapsto \sin(nt)$ est continue sur $[0; \pi]$. Par double intégration par parties,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi t(\pi - t) \sin(nt) dt &= \left[t(\pi - t) \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (\pi - 2t) \frac{-\cos(nt)}{n} dt \\
 &= 0 + \left[(\pi - 2t) \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi -2 \frac{\sin(nt)}{n^2} dt \\
 &= 0 + 2 \left[\frac{-\cos(nt)}{n^3} \right]_0^\pi = \frac{-2}{n^3} (\cos(n\pi) - \cos(0)) = \frac{2}{n^3} (1 - (-1)^n).
 \end{aligned}$$

Q2. La fonction f étant impaire, tous ses coefficients de Fourier $a_n(f)$ ($n \in \mathbf{N}$) sont nuls et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt$$

D'après la question précédente, on a donc $b_n(f) = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n)$. Remarquons que ce coefficient est nul si n est pair et vaut $\frac{8}{\pi n^3}$ si n est impair. On peut donc écrire la série de Fourier de f sous la forme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nt) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)t)}{(2p+1)^3}.$$

Q3. La fonction f est 2π -périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; de plus, elle est continue. D'après le théorème de Dirichlet, on en déduit que la série de Fourier de f converge vers f : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)t)}{(2p+1)^3}.$$

Q4. On applique l'égalité de la question précédente en $x = \frac{\pi}{2}$, en remarquant que $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}(\pi - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$ car $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$ et que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^p$:

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3},$$

d'où $R = \frac{\pi^3}{32}$.

Q5. (a) Si f est une fonction continue par morceaux et T -périodique, alors :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f)).$$

(b) On applique la formule de Parseval à la fonction f étudiée dans cet exercice. Remarquons que, f étant 2π -périodique et impaire, f^2 est paire donc $\int_0^{2\pi} f^2(t) dt = 2 \int_0^\pi f^2(t) dt$. Ainsi, d'après le calcul d'intégrale de **Q1** et les coefficients calculés en **Q2** :

$$\frac{2}{2\pi} \cdot \frac{\pi^5}{30} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6},$$

d'où $S = \frac{\pi^6}{960}$.

(c) On sépare la somme entre termes pairs et impairs :

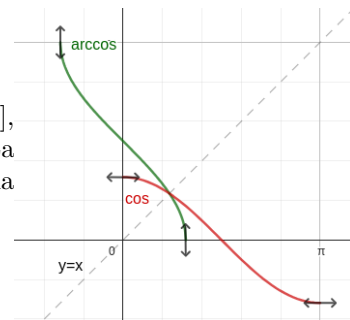
$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^6} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{1}{64} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^6} + S = \frac{T}{64} + S.$$

$$\text{Ainsi, } T = \frac{64}{63} S = \frac{\pi^6}{945}.$$

PROBLÈME

Partie A. Questions préliminaires.

Q1. (a) La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1; 1]$, on a $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\arccos(1) = 0$. La courbe admet des tangentes verticales en $x = \pm 1$ (où la fonction n'est pas dérivable).



(b) $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

(c) On développe le membre de droite :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2 \cos a \cos b.$$

(d) On utilise la formule d'addition, puis les formules de duplication du cosinus et du sinus :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = (2\cos^2(x) - 1)\cos x - (2\sin x \cos x)\sin x \\ &= 2\cos^3(x) - \cos x - 2\cos x \sin^2(x) = 2\cos^3(x) - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2(x)) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos x.\end{aligned}$$

Partie B. Un produit scalaire.

Q2. Soit $k \in \mathbf{N}$.

- (a) Lorsque $t \rightarrow 1^-$, $t^k \rightarrow 1$ donc $t^k \sim 1$. D'autre part, $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t}\sqrt{1+t}$ et $\sqrt{1+t} \rightarrow \sqrt{2}$ donc $\sqrt{1+t} \sim \sqrt{2}$. Par quotient, on a donc :

$$\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $[0; 1[$, avec donc une unique impropriété en 1. En vertu de l'équivalent ci-dessus et du théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale est de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$. Celle-ci, par théorème de changement de variable (en posant $x = 1 - t$, $\mathcal{C}^1$ strictement monotone) est de même nature que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, qui est une intégrale de référence convergente, d'où le résultat.

- (b) La fonction $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $] -1; 1[$. Intéressons-nous à l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$. On effectue le changement de variables $x = -t$, $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. On en déduit que cette intégrale est de même nature que $\int_0^1 \frac{(-1)^k x^k}{\sqrt{1-x^2}}$. Celle-ci est convergente d'après la question précédente. On en déduit que les deux intégrales $\int_{-1}^0 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ et $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ convergent, donc l'intégrale cherchée également.

Q3. Il s'agit de montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. On a vu que φ est bien définie sur $\mathbf{R}[X]^2$ et à valeur réelles.

- Pour tous $P, Q \in \mathbf{R}[X]$, on a $\varphi(Q, P) = \varphi(P, Q)$ par commutativité du produit.
- Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= \int_{-1}^1 \frac{(\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \lambda \int_{-1}^1 \frac{P_1(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{-1}^1 \frac{P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q).\end{aligned}$$

On en déduit que φ est linéaire à gauche ; par symétrie, elle est donc bilinéaire.

- Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Alors :

$$\varphi(P, P) = \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive sur $[-1; 1]$ et $-1 \leq 1$ donc $\varphi(P, P) \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

- Enfin, soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Supposons que $\varphi(P, P) = 0$. La fonction $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $] -1; 1[$. De plus, $-1 \neq 1$. On en déduit que $\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ pour tout $t \in] -1; 1[$; en particulier $P(t) = 0$ pour tout $t \in] -1; 1[$. Le polynôme P possède une infinité de racines, il est donc nul.

Ainsi φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Partie C. Une famille de fonctions.

Q4. Soit $x \in [-1; 1]$. D'après **Q1** (b) et (d) :

$$\begin{aligned}f_0(x) &= \cos(0) = 1; \\ f_1(x) &= \cos(\arccos x) = x; \\ f_2(x) &= \cos(2 \arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1; \\ f_3(x) &= \cos(3 \arccos x) = 4\cos^3(\arccos x) - 3\cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x.\end{aligned}$$

Q5. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [-1; 1]$. Alors, d'après **Q1** (c) :

$$\begin{aligned} 2xf_n(x) &= 2\cos(\arccos x)\cos(n\arccos x) \\ &= \cos(n\arccos x + \arccos x) + \cos(n\arccos x - \arccos x) \\ &= f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Q6. On peut conjecturer, d'après la relation de récurrence, que T_n est de coefficient dominant 2^{n-1} pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Montrons donc par récurrence double sur n que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Pour $n = 1$, $T_1 = X$ qui est bien de degré 1 et de coefficient dominant $2^{1-1} = 1$.

Pour $n = 2$, $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$, qui est bien de degré 2 et de coefficient dominant $2^{2-1} = 2$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que T_n (resp. T_{n+1}) est de degré n (resp. $n+1$) et de coefficient dominant 2^{n-1} (resp. 2^n). Alors $2XT_{n+1}$ est de degré $1 + \deg(T_{n+1}) = n+2$ et de coefficient dominant $2\text{cd}(T_{n+1}) = 2^{n+1}$. Ainsi, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ est de degré $n+2$ et de coefficient dominant 2^{n+1} (une somme de polynômes de degrés différents est de degré et de coefficient dominant égaux à ceux du terme de plus haut degré).

On a ainsi prouvé que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Q7. Remarquons que T_0 est de degré 0 (mais pas de coefficient dominant 2^{0-1}). Pour tout $n \in \mathbf{N}$, d'après la question précédente, la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est échelonnée en degrés, elle est donc libre. De plus, elle est composée de $n+1$ polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$; c'est donc une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q8. On procède une nouvelle fois par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$.

D'après la question **Q4** et par définition de T_0 et T_1 , on a bien $f_0(x) = T_0(x)$ et $f_1(x) = T_1(x)$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Soit maintenant $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $T_n(x) = f_n(x)$ et $T_{n+1}(x) = f_{n+1}(x)$ pour tout $x \in [-1; 1]$. Alors, pour tout $x \in [-1; 1]$, d'après **Q5**,

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= 2xf_{n+1}(x) - f_n(x) \\ &= 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= T_{n+2}(x) \text{ par définition de } T_{n+2}. \end{aligned}$$

Partie D. Une base orthogonale.

Q9. (a) Soient $p \neq q \in \mathbf{N}$. Notons qu'alors $p+q$ et $p-q$ sont tous les deux non nuls. Alors, d'après **Q1** (c),

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \int_0^\pi \cos(px)\cos(qx) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q} \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

En effet, $\sin(0) = \sin((p+q)\pi) = \sin((p-q)\pi) = 0$ car $p+q$ et $p-q$ sont entiers.

(b) Si $p = 0$, alors $I_{p,p} = \int_0^\pi 1 \, dt = \pi$. Si $p \neq 0$, alors :

$$I_{p,p} = \int_0^\pi \cos^2(px) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2px) + 1) \, dx = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin(2px)}{2p} \right]_0^\pi + \pi \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Q10. Soient $m \neq n \in \mathbf{N}$. Remarquons que, pour tout $t \in [0; \pi]$, $T_m(\cos t) = f_m(\cos t) = \cos(m\arccos(\cos t)) = \cos(mt)$.

Faisons alors le changement de variables $t = \arccos x$ ($dt = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$), de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant sur $] -1; 1[$:

$$\begin{aligned} \langle T_m | T_n \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_\pi^{-\pi} T_m(\cos t)T_n(\cos t) \, -dt \\ &= \int_{-\pi}^\pi \cos(mt)\cos(nt) \, dt = I_{m,n} = 0 \text{ car } m \neq n. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est orthogonale. En revanche elle n'est pas orthonormée car (de même que ci-dessus) $\|T_0\|^2 = \langle T_0 | T_0 \rangle = I_{0,0} = \pi \neq 1$.

- Q11.** D'après **Q7**, $\mathbf{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1})$. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ étant orthogonale, T_n est orthogonal à $T_0, \dots, T_{n-1}$ donc à tout le sous-espace qu'ils engendrent, autrement dit à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
- Q12.** La base $(T_0, \dots, T_n)$ étant orthogonale, la base $(\frac{T_0}{\|T_0\|}, \dots, \frac{T_n}{\|T_n\|})$ est orthonormée. Comme $X^n \in \mathbf{R}_n[X] = \text{Vect}(T_0, \dots, T_n)$, on peut donc écrire :

$$X^n = \sum_{k=0}^n \langle X^n | \frac{T_k}{\|T_k\|} \rangle \cdot \frac{T_k}{\|T_k\|} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\|T_k\|^2} \langle X^n | T_k \rangle \cdot T_k$$

On a montré que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} . Ainsi, $T_n - 2^{n-1}X^n$ annule exactement le terme de degré n ; il est donc de degré au plus $n-1$, donc orthogonal à T_n . Autrement dit, $\langle T_n - 2^{n-1}X^n | T_n \rangle = 0$.

Par linéarité à gauche, on en déduit que : $\|T_n\|^2 - 2^{n-1} \langle X^n | T_n \rangle = 0$, soit :

$$\langle X^n, T_n \rangle = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}.$$

Partie E. Minimiser une intégrale à paramètres.

- Q13.** D'après le théorème de la projection (car $\mathbf{R}_1[X]$ est de dimension finie), $I = \|X^2 - p(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|p(X^2)\|^2$.
- Q14.** D'après les questions **Q9** et **Q10**, une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$ et donnée par $(\frac{T_0}{\|T_0\|}, \frac{T_1}{\|T_1\|}) = (\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}X)$
- Q15.** On a montré que $T_2 = 2X^2 - 1$, donc $X^2 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0$. Ainsi, en utilisant la base orthonormée de la question précédente :

$$\begin{aligned} p(X^2) &= \langle X^2 | T_0 \rangle \frac{T_0}{\|T_0\|^2} + \langle X^2 | T_1 \rangle \frac{T_1}{\|T_1\|^2} \\ &= \frac{1}{2} \langle T_0 | T_0 \rangle \frac{T_0}{\|T_0\|^2} + \frac{1}{2} \langle T_2 | T_0 \rangle \frac{T_0}{\|T_0\|^2} + \frac{1}{2} \langle T_0 | T_1 \rangle \frac{T_1}{\|T_1\|^2} + \frac{1}{2} \langle T_2 | T_1 \rangle \frac{T_1}{\|T_1\|^2} \\ &= \frac{1}{2} T_0 + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

par orthogonalité de la famille (T_0, T_1, T_2) .

- Q16.** D'après les questions précédentes, on a donc :

$$I = \left\| X^2 - \frac{1}{2} \right\|^2 = \left\| \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4} \|T_2\|^2 = \frac{\pi}{8}.$$