

Samedi 22 mars 2025 – Durée : 4h

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Ce sujet comporte deux problèmes indépendants. Le premier problème est consacré au calcul de la valeur d'une série et à son utilisation pour modéliser une expérience aléatoire. Le second problème est consacré à l'utilisation des séries de Fourier pour résoudre, dans un cas particulier, l'équation de propagation de la chaleur dans un solide conducteur à une seule dimension. Cette équation a été étudiée par Joseph Fourier en 1802.

PROBLÈME I. SÉRIES ET PROBABILITÉS

Notations et rappels. Si $(k, n) \in \mathbf{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n . On rappelle que si $k > 0$, alors $\binom{n}{k} = 0$ par convention.

Objectifs. Dans la sous-partie **I.A**, on montre que, pour tout $x \in]-1; 1[$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$ converge et que :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Dans la sous-partie **I.B**, on utilise ce résultat pour étudier une expérience aléatoire.

I.A. Calcul de la somme d'une série. Dans les questions 1 et 2, k désigne un entier naturel fixé.

Q1. Montrer que $\binom{n+1}{k} \sim \binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$.

Lorsqu'elle est définie, on note $S_k(x)$ la valeur de la somme de cette série.

Q3. Rappeler sans démonstration le domaine de définition de la fonction S_0 et, pour tout réel x dans ce domaine, la valeur de $S_0(x)$.

Q4. À l'aide d'un théorème du cours énoncé avec précision, justifier que, pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Q5. Montrer que, pour tout $(n, k) \in \mathbf{N}^2$ tel que $k < n$, on a $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Q6. En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in]-1; 1[$, $S_{k+1}(x) = xS_k(x) + xS_{k+1}(x)$.

Q7. Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in]-1; 1[$:

$$S_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

I.B. Étude d'une expérience aléatoire. On considère un dé équilibré comportant une face blanche et cinq faces noires. On réalise l'expérience aléatoire suivante :

- On lance le dé jusqu'à obtenir la face blanche. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face blanche.
- Si N prend une valeur entière positive non nulle n lors de la première étape, on réalise alors une série de n lancers du dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la face blanche a été obtenue lors de cette seconde série de lancers.

Q8. Reconnaître la loi de la variable aléatoire N .

Q9. Calculer, en explicitant les calculs, l'espérance et la variance de N .

Q10. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, donner une expression de $\mathbf{P}(N \leq n)$ en fonction de n qui ne fasse pas intervenir le symbole Σ .

Q11. Soient $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. En distinguant les cas $k \leq n$ et $k > n$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{(N=n)}(X = k)$.

Q12. Démontrer que $\mathbf{P}(X = 0) = \frac{5}{11}$, puis que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{36}{55} \left(\frac{5}{11} \right)^k.$$

Q13. Vérifier que $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = k) = 1$.

Q14. Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(X)$.

Q15. Calculer $\mathbf{E}(X(X - 1))$.

Q16. En déduire que X admet une variance et calculer $\mathbf{V}(X)$.

PROBLÈME II. SÉRIES DE FOURIER ET ÉQUATION DE LA CHALEUR

Rappels. Si F est une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, périodique de période 2, alors :

- les coefficients de Fourier trigonométriques de F , $(A_n(F))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n(F))_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont définis par :

$$\begin{cases} a_0(F) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(t) dt \\ \forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n(F) = \int_{-1}^1 F(t) \cos(n\pi t) dt \quad \text{et} \quad b_n(F) = \int_{-1}^1 F(t) \sin(n\pi t) dt; \end{cases}$$

- la série $\sum ((a_n(F))^2 + (b_n(F))^2)$ converge ;
- si F est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors la série de Fourier de F converge en tout nombre réel x et sa somme vaut $F(x)$.

II.A. Propriétés des coefficients de Fourier. Dans toute cette sous-partie, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, périodique de période 2. Sa dérivée est notée F' .

Q17. Démontrer que :

- si la fonction F est paire, alors, pour tout entier naturel n non nul, $b_n(F) = 0$;
- si la fonction F est impaire, alors, pour tout entier naturel n , $a_n(F) = 0$.

Q18. Démontrer que :

- si la fonction F est paire, alors sa dérivée F' est impaire ;
- si la fonction F est impaire, alors sa dérivée F' est paire.

Q19. Démontrer que :

$$\begin{cases} a_0(F') = 0, \\ \forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n(F') = n\pi b_n(F) \quad \text{et} \quad b_n(F') = -n\pi a_n(F). \end{cases}$$

Pour les deux dernières égalités, on pourra effectuer une intégration par parties.

Q20. En déduire que les deux séries $\sum n^2((a_n(F))^2)$ et $\sum n^2(b_n(F))^2$ sont convergentes.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que la fonction F est périodique de période 2, impaire et de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$. On note $F^{(3)}$ sa dérivée troisième.

Q21. Exprimer les coefficients de Fourier trigonométriques de $F^{(3)}$ en fonction de ceux de F .

Q22. En déduire la nature de la série $\sum n^6(b_n(F))^2$.

Q23. Pour deux réels quelconques a et b , démontrer que $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Q24. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n^2|b_n(F)| \leq \frac{1}{2} \left(n^6(b_n(F))^2 + \frac{1}{n^2} \right)$.

Q25. Quelle est la nature de la série $\sum n^2 b_n(F)$?

II.B. Un problème de prolongement. On suppose dans cette sous-partie que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

Q26. Démontrer qu'il existe une unique fonction F impaire, périodique de période 2, telle que

$$\forall x \in [0; 1] \quad F(x) = f(x).$$

Q27. Décrire l'enchaînement des transformations géométriques qui permettent d'obtenir la courbe représentative de F à partir de celle de f .

Q28. À l'aide d'arguments géométriques, justifier que la courbe représentative de la fonction F admet des tangentes aux points d'abscisses 0, 1 et -1 . Déterminer les coefficients directeurs de ces trois tangentes.

On admet pour la suite du problème que, si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0; 1]$ et vérifie

$$f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0,$$

où f'' désigne la dérivée seconde de f , alors la fonction F est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$.

II.C. L'équation de la chaleur. On considère une barre rectiligne métallique de longueur 1 m. On suppose qu'au cours du temps la température de chacune de ses extrémités est maintenue à 0 °C. On prend pour origine l'une des extrémités de la barre et on repère chaque point de la barre par son abscisse x (en mètre). On note $f(x)$ la température (en degrés Celsius) à l'instant $t = 0$ au point de la barre d'abscisse x . On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0; 1]$.

On note $\Delta = [0; +\infty[\times [0; 1[$. Pour $(t, x) \in \Delta$, on note $u(t, x)$ la température, à l'instant t , au point de la barre d'abscisse x . On admet que la fonction u vérifie l'équation de la chaleur :

$$\forall (t, x) \in \Delta \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x). \quad (1)$$

Les conditions spécifiées dans l'énoncé imposent en plus les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \forall t \in [0; +\infty[; \\ u(0, x) = f(x) & \forall x \in [0; 1]. \end{cases}$$

On cherche à déterminer les fonctions u solutions de l'équation (1) vérifiant de plus les conditions de régularité suivantes :

$$\forall t \in [0; +\infty[\quad \text{la fonction } g_t: \left\{ \begin{array}{l} [0; 1] \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto u(t, x) \end{array} \right. \text{ est de classe } \mathcal{C}^3 \text{ sur } [0; 1];$$

$$\forall x \in [0; 1] \quad \text{la fonction } h_x: \left\{ \begin{array}{l} [0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto u(t, x) \end{array} \right. \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0; +\infty[.$$

Q29. Démontrer que :

$$\forall t \in [0; +\infty[\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) = 0.$$

Q30. Que peut-on en déduire pour les valeurs de $f''(0)$ et de $f''(1)$?

Q31. Justifier que f est prolongeable en une unique fonction F impaire, périodique de période 2 et de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$.

On suppose que u est une solution du problème et on fixe $t \in [0; +\infty[$.

Q32. Démontrer que la fonction g_t est prolongeable en une unique fonction G_t impaire, périodique de période 2 et de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$.

Q33. Démontrer qu'il existe une suite $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad G_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

Q34. Exprimer $\beta_n(0)$ à l'aide de la fonction F .

Q35. Justifier que la dérivée seconde de G_t , notée G_t'' , est égale à la somme de sa série de Fourier et écrire cette somme.

Pour $(t, x) \in [0; +\infty[\times \mathbf{R}$, on note $U(t, x) = G_t(x)$. On admet que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction β_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$, que la série $\sum |\beta_n'(t)|$ converge et que :

$$\forall (t, x) \in [0; +\infty[\times \mathbf{R} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t) \sin(n\pi x).$$

Q36. En déduire que :

$$\forall (t, x) \in \Delta \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t) \sin(n\pi x) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

On admet que cette égalité entraîne, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in [0; +\infty[$, l'égalité :

$$\beta_n'(t) = -n^2 \pi^2 \beta_n(t).$$

Q37. Donner l'ensemble des solutions, sur $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle $y'(t) + n^2 \pi^2 y(t) = 0$.

Q38. En déduire que la solution cherchée est définie par :

$$\forall (t, x) \in \Delta \quad u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(F) e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Remarque. Il est possible, mais non demandé ici, de démontrer que cette fonction vérifie bien toutes les conditions imposées.

(tout le sujet d'après Centrale-Supélec 2021)