1. Soit $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Soient $a > 0$ et $\mathcal{S}_a \colon E \to E$ l'application définie par :

$$\mathcal{S}_a(f) = \frac{1}{2} \int_{x-a}^{x+a} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

(1) Soit $f \colon t \mapsto \sin(\frac{\pi t}{a})$. Calculer $\mathcal{S}_a(f)$.

(2) Soit $f \in E$. Montrer que $S_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(3) Montrer que $\mathcal{S}_a$ n'est ni injective ni surjective.

(4) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par $\mathcal{S}_a$.

Dans la suite, on note s_a l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ induit par $\mathcal{S}_a$.

(5) Montrer que s_a est un automorphisme.

(6) Montrer que, dans une base bien choisie, la matrice de s_a est triangulaire supérieure.

(7) L'endomorphisme s_a est-il diagonalisable ?

2. Une urne contient $2n$ boules portant des numéros différents : n boules portent le numéro 0, les n autres boules sont numérotées de 1 à n. On tire une poignée de n boules dans l'urne.

(1) Écrire une fonction Python qui prend en entrée l'entier n, simule l'expérience et renvoie la liste des boules tirées.

Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on note U_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée k est dans la poignée, et 0 sinon.

(2) Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, déterminer la loi de U_k. Donner son espérance et sa variance, puis calculer $\mathrm{Cov}(U_i, U_j)$ pour $i \neq j$.

(3) Soit $N = U_1 + \cdots + U_n$. Que représente N ? Calculer l'espérance et la variance de N.

(4) Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules présentes dans la poignée. Exprimer S en fonction des variables U_k, $1 \leq k \leq n$.

(5) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules numérotées 0 présentes dans la poignée. Donner une expression de Z, puis calculer son espérance et sa variance.

3. Soient n un entier naturel non nul et $a < b \in \mathbf{R}$. On considère les polynômes

$$P_n = (X-a)^n (X-b)^n \quad \text{et} \quad Q_n = \tfrac{1}{n!} P_n^{(n)}.$$

(1) Déterminer le degré de Q_n ainsi que son coefficient dominant.

(2) Montrer que, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(b) = 0$. Montrer que $Q_n(a) \neq 0$ et que $Q_n(b) \neq 0$.

(3) Justifier l'existence, puis donner l'expression, de coefficients $(\lambda_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ tels que

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} (X-a)^{n-k} (X-b)^k.$$

(4) Pour tous $p, q \in \mathbf{N}^*$, on considère l'intégrale $I_{p,q} = \displaystyle\int_a^b (t-a)^p (t-b)^q \,\mathrm{d}t$. Calculer $I_{p,0}$, puis établir une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$; en déduire une expression de $I_{p,q}$ pour tous $p, q \in \mathbf{N}^*$.

(5) Calculer les intégrales $I_n = \displaystyle\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t$.

4. On considère une urne contenant $n-1$ boules noires et une boule blanche indiscernables au toucher.

(1) On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne, on note T la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner l'univers-image de T, sa loi, son espérance et sa variance.

(2) On effectue maintenant des tirages sans remise. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche.

(a) Écrire une fonction Python simulant l'expérience, en déduire une valeur approchée de $\mathbf{E}(X)$.

(b) Quel est l'univers-image de X ?

(c) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note B_k l'événement « tirer la boule blanche au k-ème tirage. » Écrire l'événement $(X = k)$ en fonction des événements B_j, $1 \leq j \leq k$.

(d) En déduire la loi, puis l'espérance et la variance de X.

(3) Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires restant dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n. Donner l'espérance de Y ainsi que sa variance.

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère A la matrice carrée d'ordre n avec des zéros sur la diagonale et des 1 en dehors.

(1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(2) Soit $B = A + I_n$. Calculer B^2 ; en déduire un polynôme annulateur de A.

(3) Déterminer le spectre de A. Justifier que la matrice A est inversible, puis donner une expression de son inverse.

6. On considère la fonction $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

(2) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}^2$.

(3) Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

(4) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. En écrivant la formule de Taylor-Young au premier ordre en $(0,0)$, aboutir à une contradiction ; conclure.

7. Déterminer la nature géométrique et donner les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 t^k P(t)\,\mathrm{d}t \right) X^k$.

(1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$.

(2) Écrire la matrice M de Φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$. Justifier que M est diagonalisable.

(3) Soit $U = (u_0, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Montrer que $U^\top M U = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} u_k t^k \right)^2 \mathrm{d}t$. En déduire que toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

(4) Soit λ_n la plus petite valeur propre de M. Montrer que $\lambda_n \to 0$ lorsque n tend vers l'infini (on pourra minorer la trace de M en fonction de λ_n).