

1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

- (1) Déterminer une base de F ainsi que sa dimension.
- (2) Donner un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^4$.

2. Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l’espace vectoriel des suites de nombres réels. On considère $F \subset E$ l’ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

- (1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- (2) Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de F .
- (3) Montrer que la famille $((a_n)_{n \in \mathbf{N}}, (b_n)_{n \in \mathbf{N}})$ est en fait une base de F (on pourra utiliser le fait qu’un élément $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de F est uniquement déterminé par les valeurs de u_0 et u_1).
- (4) Justifier que le problème :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = -2; \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

possède une unique solution et en donner une expression explicite.

3.

- (1) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$. On suppose que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ et que $\lambda_n \neq 0$. Donner un équivalent simple de $f(t) = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \dots + \lambda_n e^{\alpha_n t}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.
- (2) Montrer que $(t \mapsto e^{\alpha t})_{\alpha \in \mathbf{R}}$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

4. Soit E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie $n \in \mathbf{N}$. Soient F et G deux sev de E de même dimension $p \leq n$. Le but de l’exercice est de montrer que F et G admettent un *supplémentaire commun*, c’est-à-dire qu’il existe un sev H de E tel que $E = F \oplus H = G \oplus H$.

- (1) Montrer la proposition dans le cas où $F = G$ (on pourra utiliser le théorème de la base incomplète).
- (2) On suppose $F \neq G$.
 - (a) Montrer qu’il existe un vecteur $z \in E$ qui n’appartient ni à F ni à G . Justifier que F et $\text{Vect}(z)$ sont en somme directe (de même pour G et $\text{Vect}(z)$).
 - (b) Montrer que, si $F \oplus \text{Vect}(z)$ et $G \oplus \text{Vect}(z)$ admettent un supplémentaire commun, alors F et G admettent un supplémentaire commun.
- (3) Démontrer la proposition (on pourra procéder par récurrence sur $n - p$).

5. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ deux à deux distincts.

- (1) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\phi_k : P \mapsto P(a_k)$ définit une forme linéaire sur E .
- (2) Montrer que la famille $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est libre (dans quel espace?).
- (3) En déduire qu’il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $P \in E$,

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k).$$

6. On considère l’application linéaire $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$. L’application f est-elle une projection ? une symétrie ? Déterminer une base de ses éléments caractéristiques.

7. Montrer qu’une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

8. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. On suppose que u et v commutent (c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$). Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont des sous-espaces stables par v .

9. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E .

- (1) On suppose que f est surjective. Montrer que f^2 est surjective.
- (2) On suppose que $f^3 = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

10. Dans $E = \mathbf{K}^3$, on considère :

$$P = \{(x, y, z) \in E \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad D = \{(x, y, z) \in E \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\}.$$

- (1) Justifier que P et D sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (2) P et D sont-ils supplémentaires ?
- (3) Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection sur P parallèlement à D .

11. Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$. On définit $u: E \rightarrow E$ par $u(P) = P + (1 - X)P'$.

- (1) Montrer que u est un endomorphisme de E .
- (2) Calculer la matrice de u dans la base canonique de E .
- (3) Déterminer une base du noyau et de l'image de u .
- (4) Justifier que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires dans E .

12. Soit ϕ l'application définie sur $\mathbf{R}[X]$ par $\phi(P) = P(X + 1) + P(X)$.

- (1) Calculer $\phi(1)$, $\phi(X)$, $\phi(X^2)$.
- (2) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que la restriction de ϕ à $\mathbf{R}_n[X]$ définit un endomorphisme. Est-il injectif ? Surjectif ?
- (3) Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

13. Soient $E = \mathbf{R}^4$ et $F = \mathbf{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

14. On considère f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Déterminer une base du noyau et de l'image de f .
- (2) En déduire, sans calculer M^2 , que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

15. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$. On suppose que $f \neq 0$ mais $f^2 = 0$.

- (1) Montrer que $\ker f$ est de dimension 2.
- (2) En déduire qu'il existe une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Soit u l'application linéaire canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On considère les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et (f_1, f_2) une base de $\mathbf{R}^2$.
- (2) Déterminer la matrice de u dans ces nouvelles bases.