

1. Démontrer le *lemme de Riemann-Lebesgue* : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a; b]$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0.$$

En déduire (sans utiliser les formules de Parseval ou de Dirichlet) que les coefficients de Fourier d'une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ tendent vers zéro.

2. Soit f la fonction paire et 2π -périodique telle que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0; \pi]$.

(1) Représenter graphiquement la fonction f .

(2) Calculer les coefficients de Fourier de f .

(3) En déduire la somme des séries :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}; \quad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

3. Déterminer la série de Fourier de la fonction $\cos^3$.

4. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction 2π -périodique, impaire, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement la fonction f .

(2) Calculer les coefficients de Fourier de f .

(3) Étudier la convergence de la série de Fourier de f .

(4) En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}; \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

5. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = (x - \pi)^2$ pour tout $x \in [0; 2\pi]$.

(1) Représenter graphiquement la fonction f .

(2) Calculer les coefficients de Fourier de f .

(3) En déduire les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

6. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = |\sin x|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(1) Vérifier que la fonction f est π -périodique. Tracer son allure.

(2) Justifier que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

(3) Calculer la série de Fourier de f .

(4) Déterminer la valeur de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

7.

(1) Soit f une fonction continue et T -périodique. On suppose que tous les coefficients de Fourier de f sont nuls. Que dire de f ?

(2) Soient f et g deux fonctions continues et T -périodiques. On suppose que les coefficients de Fourier de f et g sont égaux. Que peut-on en déduire ?

(3) Que dire si on ne suppose plus que les fonctions des questions (1) et (2) sont continues mais continues par morceaux ?

8. Soit g la fonction 2π -périodique définie par :

$$\forall x \in]-\pi; \pi] \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi^2}{4} & \text{si } |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- (1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction g .
- (2) En déduire la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$

9. Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. On s'intéresse à la fonction f 2π -périodique telle que, pour tout $x \in [-\pi; \pi[$, $f(x) = \cos(\alpha x)$.

- (1) Déterminer les coefficients de Fourier de f .
- (2) Calculer la somme de la série de Fourier de f .
- (3) En déduire la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

10. Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in]-\pi; \pi]$.

- (1) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- (2) En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\pi \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}} - 1 \right).$$

11. On fixe $\theta \in]0; \pi[$ et on considère l'application $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ paire et 2π -périodique telle que, pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; \theta] \\ 0 & \text{si } x \in]\theta; \pi] \end{cases}$$

- (1) Représenter graphiquement la restriction de f à $[-\pi; 2\pi]$.
- (2) Déterminer la série de Fourier de f .
- (3) Étudier la convergence de cette série.
- (4) En déduire, pour tout $\theta \in]0; \pi[$, la valeur des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^2}.$$

12.

- (1) On considère la fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = |\sin(\pi x)|$. Déterminer la série de Fourier de f et la somme de cette série.
- (2) Soient $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(2\pi nt)$ sous la forme d'un polynôme en $\sin(\pi t)$.
- (3) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que, pour tout $x \in [-1; 1]$, $||x| - P(x)| \leq \varepsilon$.

Dans cet exercice, on a montré un cas particulier du théorème de Weierstrass qui affirme que, pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a; b]$.

13. Soit f une fonction 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.

- (1) Exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f .
- (2) En déduire que :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$